Material zur Vorlesung

K-Theorie und die Hopf-Invariante

Theorem. *Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Das Produkt*

$$\cdot\colon K^m(X) \otimes K^n(X) \to K^{m+n}(X) \ ,$$

welches die K-Theorie von X zu einem Ring macht, ist graduiert kommutativ, d.h. für $a \in K^m(X)$, $b \in K^n(X)$ gilt: $a \cdot b = (-1)^{m \cdot n}(b \cdot a)$.

Beweis. Sei $\Delta\colon X \to X \times X$ die Diagonalabbildung und sei

$$*\colon K^m(X) \otimes K^n(X) \to K^{m+n}(X \times X)$$

das in der Vorlesung definierte äußere Produkt. Dann gilt $a \cdot b = \Delta^*(a * b)$ nach Definition. Sei $\tau\colon X \times X \to X \times X$ gegeben durch $\tau(x, y) = (y, x)$ und sei $s\colon K^m(X) \otimes K^n(X) \to K^n(X) \otimes K^m(X)$ die Abbildung, die die beiden Tensorfaktoren vertauscht. Sei $\rho\colon (I, \partial I)^{n+m} \to (I, \partial I)^{m+n}$ gegeben durch $\rho(t_1, \ldots, t_n, r_1, \ldots, r_m) = (r_1, \ldots, r_m, t_1, \ldots, t_n)$. Wegen $\tau \circ \Delta = \Delta$ und der Natürlichkeit des äußeren Produktes kommutieren die folgenden Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
K^0(X \times (I,\partial I)^m) \otimes K^0(X \times (I,\partial I)^n) \arrow[r, "*"] \arrow[d, "s"'] & K^0(X \times X \times (I,\partial I)^{m+n}) \arrow[d, "(\tau\times\rho)^*"] \\
K^0(X \times (I,\partial I)^n) \otimes K^0(X \times (I,\partial I)^m) \arrow[r, "*"'] & K^0(X \times X \times (I,\partial I)^{n+m})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K^0(X \times X \times (I,\partial I)^{m+n}) \arrow[r, "(\Delta\times\mathrm{id})^*"] \arrow[d, "(\tau\times\rho)^*"'] & K^0(X \times (I,\partial I)^{m+n}) \arrow[d, "(\mathrm{id}\times\rho)^*"] \\
K^0(X \times X \times (I,\partial I)^{n+m}) \arrow[r, "(\Delta\times\mathrm{id})^*"'] & K^0(X \times (I,\partial I)^{n+m})
\end{tikzcd}$$

Folglich erhalten wir $(\mathrm{id} \times \rho)^*(a \cdot b) = b \cdot a$. Wir können ρ schreiben als Verknüpfung von $n \cdot m$ Transpositionen, wobei eine Transposition von $(I, \partial I)^{n+m}$ zwei benachbarte Faktoren vertauscht. Falls wir also zeigen können, dass die Abbildung $\mathrm{id} \times \kappa\colon X \times (I, \partial I)^2 \to X \times (I, \partial I)^2$, die gegeben ist durch $(\mathrm{id} \times \kappa)(x, t_1, t_2) = (x, t_2, t_1)$ die Multiplikation mit (-1) auf $K^0(X \times (I, \partial I)^2)$ induziert, folgt daraus der Satz.

Die Abbildung $\kappa\colon (I, \partial I)^2 \to (I, \partial I)^2$ mit $\kappa(t_1, t_2) = (t_2, t_1)$ ist die Spiegelung des Quadrates an der Diagonalen. Wir haben $(I, \partial I)^2 \cong (D^2, S^1)$ und wie man durch Drehen von (D^2, S^1) leicht sieht, ist κ als Abbildung des Raumpaars $(I, \partial I)^2$ homotop zu $\kappa'\colon (I, \partial I)^2 \to$

$(I,\partial I)^2$ mit $\kappa'(t_1,t_2) = (1-t_1,t_2)$. Sei $\kappa''\colon (I,\partial I) \to (I,\partial I)$ gegeben durch $\kappa''(t) = 1-t$. Dann gilt $\kappa' = \kappa'' \times \mathrm{id}$. Es genügt also zu zeigen, dass für alle Räume X die Abbildung $(\mathrm{id}_X \times \kappa'')^*\colon K^0(X \times (I,\partial I)) \to K^0(X \times (I,\partial I))$ durch Multiplikation mit (-1) gegeben ist.

Jedes Tripel (E_0, f, E_1), das eine Klasse in $K^0(X \times I, X \times \partial I)$ repräsentiert, ist äquivalent zu einem der Form $(F_0 \times I, (g_0, g_1), F_1 \times I)$, wobei $F_i \to X$ ein Vektorbündel über X und $g_i\colon F_0 \to F_1$ der Isomorphismus über $X \times \{i\}$ ist. Durch Verknüpfen mit $g_0^{-1} \times \mathrm{id}_I$ ist dieses Tripel isomorph zu $(F_0 \times I, (\mathrm{id}_{F_0}, h), F_0 \times I)$ mit $h = g_0^{-1} \circ g_1$. Jetzt gilt

$$(\mathrm{id} \times \kappa'')^*([F_0 \times I, (\mathrm{id}, h), F_0 \times I]_{\mathrm{st}}) = [F_0 \times I, (h, \mathrm{id}), F_0 \times I]_{\mathrm{st}}$$

Die Summe $(\mathrm{id} \times \kappa'')^*([F_0 \times I, (\mathrm{id}, h), F_0 \times I]_{\mathrm{st}}) + [F_0 \times I, (\mathrm{id}, h), F_0 \times I]$ ist isomorph zum Tripel mit der Verknüpfung der beiden Abbildungen nach Lemma 3.4 i) aus der Vorlesung, d.h. sie ist isomorph zu

$$[F_0 \times I, (h,h), F_0 \times I]_{\mathrm{st}} = [F_0 \times I, (\mathrm{id}, \mathrm{id}), F_0 \times I]_{\mathrm{st}} = 0\ .$$

Somit gilt $(\mathrm{id} \times \kappa'')^*(a) = -a$, was zu zeigen war. $\square$