Aufgaben zur Vorlesung

K-Theorie und die Hopf-Invariante

Aufgabe 1. Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-Sphäre und sei

$$TS^n = \left\{(x,v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v\rangle = 0\right\}$$

Sei $p\colon TS^n \to S^n$ gegeben durch $p(x,v) = x$. Zeige, dass $p\colon TS^n \to S^n$ lokal trivial ist.

Lösung: Sei $x_0 \in S^n$ gegeben. Sei $U = \{x \in S^n \mid \langle x, x_0\rangle > 0\}$. Da $\langle x_0, x_0\rangle = 1$ ist $x_0 \in U$. Außerdem ist U offen in S^n, also ist U eine offene Umgebung von x_0. Sei $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Hyperebene gegeben durch $H = \left\{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x_0, v\rangle = 0\right\}$. Dies ist ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. Wir wählen einen Isomorphismus $\kappa\colon H \to \mathbb{R}^n$. Sei $TS^n|_U = p^{-1}(U)$. Wegen $\langle x_0, x_0\rangle = 1$ liegt $v - \langle x_0, v\rangle x_0$ in H für alle $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Betrachte

$$\varphi\colon\ TS^n|_U \to U \times \mathbb{R}^n \quad ; \quad (x,v) \mapsto (x, \kappa(v - \langle x_0, v\rangle x_0))\ .$$

Sei außerdem $\psi\colon U \times \mathbb{R}^n \to TS^n|_U$ gegeben durch

$$\psi(x,w) = \left(x, \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x, x_0\rangle}\, x_0\right)\ .$$

Beachte, dass der Nenner im Bruch immer $\neq 0$ ist, da $x \in U$. Außerdem haben wir die Inklusion $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in der Notation weggelassen. Die Abbildung ψ ist wohldefiniert, da

$$\left\langle x, \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x, x_0\rangle}\, x_0 \right\rangle = \langle x, \kappa^{-1}(w)\rangle - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x, x_0\rangle}\,\langle x, x_0\rangle = 0$$

Beide Abbildungen sind stetig. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)(x,v) &= \left(x, v - \langle x_0, v\rangle x_0 - \frac{\langle x, v - \langle x_0, v\rangle x_0\rangle}{\langle x, x_0\rangle} x_0\right) \\
&= (x, v - \langle x_0, v\rangle x_0 + \langle x_0, v\rangle x_0) = (x,v)
\end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Gleichung benutzt haben, dass $\langle x, v\rangle = 0$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)(x,w) &= \left(x, \kappa\left(\kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x, x_0\rangle}\, x_0 - \left\langle x_0, \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x, x_0\rangle}\, x_0 \right\rangle x_0\right)\right) \\
&= \left(x, \kappa\left(\kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x, x_0\rangle}\, x_0 - \left\langle x_0, \kappa^{-1}(w)\right\rangle + \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x, x_0\rangle} x_0\right)\right) \\
&= \left(x, \kappa\left(\kappa^{-1}(w) - \left\langle x_0, \kappa^{-1}(w)\right\rangle\right)\right) = (x, \kappa(\kappa^{-1}(w))) = (x,w)\ .
\end{aligned}$$

Hier haben wir in der letzten Zeile benutzt, dass $\langle x_0, \kappa^{-1}(w)\rangle = 0$, da $\kappa^{-1}(w) \in H$. Folglich ist φ ein Homöomorphismus. Es ist außerdem klar, dass φ eingeschränkt auf die Fasern eine lineare Abbildung ist. Somit ist TS^n lokal trivial.