Aufgaben zur Vorlesung

K-Theorie und die Hopf-Invariante

Aufgabe 6. Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Sei $p\colon E \to X$ ein endlichdimensionales K-Vektorbündel. Zeige, dass dann ein K-Vektorbündel $q\colon F \to X$ existiert, so dass $E \oplus F$ trivialisierbar ist. Hieraus folgt Lemma 3.8 aus der Vorlesung.

Lösung: Wir nehmen o.B.d.A. an, dass X zusammenhängend ist, da wir den Beweis komponentenweise durchführen können. Sei U_i für $i \in I = \{1, \dots, N\}$ eine endliche offene Überdeckung von X, so dass lokale Trivialisierungen $\varphi_i\colon\ E|_{U_i} \to U_i \times K^n$ existieren. Wähle außerdem eine der Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ untergeordnete Partition der Eins $\rho_i\colon X \to [0,1]$. Sei $\psi_i\colon E \to K^n$ gegeben durch

$$\psi_i(v) = \begin{cases} \rho_i(p(v)) \cdot \left(\mathrm{pr}^{(i)}_{K^n} \circ \varphi_i\right)(v) & \text{falls } p(v) \in U_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hierbei ist $\mathrm{pr}^{(i)}_{K^n}\colon U_i \times K^n \to K^n$ die Projektion auf die zweite Komponente. Dies ist eine stetige Abbildung, da ρ_i außerhalb von U_i verschwindet. Jetzt betrachte

$$\psi\colon E \to X \times \underbrace{K^n \oplus \cdots \oplus K^n}_{N \text{ Summanden}} \quad ; \quad v \mapsto (p(v), (\psi_1(v), \dots, \psi_N(v)))$$

Dies ist ein Morphismus von K-Vektorbündeln, der die Fasern von E injektiv nach K^{nN} abbildet, da für jedes v mindestens ein $\rho_i(p(v))$ ungleich 0 ist. Sei $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ das Standardskalarprodukt auf K^{nN} sei $\varphi\colon E \to K^{nN}$ gegeben durch $\varphi = \mathrm{pr}_{K^{nN}} \circ \psi$. Sei

$$F = \left\{(x, w) \in X \times K^{nN} \mid \langle w, \varphi(v)\rangle = 0 \text{ für alle } v \in E_x\right\} ,$$

und sei $q\colon F \to X$ gegeben durch $q(x, w) = x$. Dann ist $F_x = q^{-1}(x)$ das orthogonale Komplement der Faser E_x von E über x. Insbesondere ist $x \mapsto \dim(F_x)$ konstant, da dies auch für $x \mapsto \dim(E_x)$ gilt. Wir wollen sehen, dass F ein K-Vektorbündel über X ist. Es bleibt die lokale Trivialität von F zu zeigen.

Sei $p\colon X \to M_{nN}(K)$ dadurch definiert, dass $p(x)$ die (eindeutige) orthogonale Projektion auf F_x ist. Dann ist p stetig. Dies lässt sich wie folgt sehen: Sei $x' \in U_i \subset X$, dann liefern $f_k(x) = (\varphi \circ \varphi_i^{-1})(x, e_k)$ für $k \in \{1, \dots, n\}$ stetige Abbildungen $U_i \to K^{nN}$, so dass $\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ für alle $x \in U_i$ eine Basis von $\varphi(E_x)$ ist (wegen der Injektivität von $\varphi|_{E_x}$). Wenden wir das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die f_i

an, erhalten wir neue stetige Abbildungen $\hat{f}_i \colon U_i \to K^{nN}$, so dass $\{\hat{f}_1(x), \ldots, \hat{f}_n(x)\}$ eine Orthonormalbasis von $\varphi(E_x)$ ist. Es gilt dann

$$p|_{U_i}(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \langle \hat{f}_k(x), \cdot \rangle \, \hat{f}_k(x) \; .$$

Somit ist p stetig in x'. Sei jetzt $x_0 \in X$ und sei $p_0 = p(x_0)$. Betrachte

$$\tilde{\varphi}_0 \colon F \to X \times F_{x_0} \quad ; \quad (x, w) \mapsto (x, p_0 \, w)$$

Dies ist eine stetige Abbildung mit $\tilde{\varphi}_0|_{F_{x_0}} = \mathrm{id}_{F_{x_0}}$. Außerdem sei

$$\tilde{\psi}_0 \colon X \times F_{x_0} \to F \quad ; \quad (x, w') \mapsto (x, p(x)w')$$

Die Komposition $\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\psi}_0$ erfüllt $\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\psi}_0(x, w) = (x, \tilde{p}(x)\, w)$ für eine stetige Abbildung $\tilde{p} \colon X \to \hom_K(F_{x_0}, F_{x_0})$ mit $\tilde{p}(x_0) = \mathrm{id}_{F_{x_0}}$. Da die invertierbaren Elemente offen in $\hom_K(F_{x_0}, F_{x_0})$ sind, muss es eine offene Umgebung $x_0 \in U \subset X$ geben, so dass $\tilde{p}|_U$ invertierbar an jedem Punkt ist. Somit ist $\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\psi}_0\big|_U$ ein Isomorphismus des trivialen Vektorbündels $U \times F_{x_0}$ und $\tilde{\varphi}_0|_U \colon \; F|_U \to U \times F_{x_0}$ bildet jede Faser F_x surjektiv und damit aus Dimensionsgründen auch injektiv auf F_{x_0} ab. Dann ist $\tilde{\varphi}_0|_U$ aber eine lokale Trivialisierung von F über U. (Wichtige Nebenbemerkung: $\tilde{\varphi}_0$ ist nicht notwendigerweise ein Isomorphismus über X!)

Es bleibt zu zeigen, dass $E \oplus F \cong X \times K^{nN}$ ist. Dieser Isomorphismus ist gegeben durch

$$E \oplus F \to X \times K^{nN} \quad ; \quad (v, w) \mapsto \psi(v) + w \; .$$

Das Inverse hierzu bildet $(x, w') \in X \times K^{nN}$ auf $(\psi^{-1}((1 - p(x))w'), p(x)w')$ ab.