Aufgaben zur Vorlesung

K-Theorie und die Hopf-Invariante

Aufgabe 7. Sei folgendes Diagramm ein Pushout-Diagramm von kompakten Hausdorffräumen:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & X_1 \arrow[d, "j_1"] \\ X_2 \arrow[r, hook, "j_2"'] & X \end{tikzcd}$$

Seien $p_i\colon E_i \to X_i$ for $i \in \{1,2\}$ K-Vektorbündel und $f\colon i_1^* E_1 \to i_2^* E_2$ ein Isomorphismus von K-Vektorbündeln über X_0. Zeige, dass dann

$$E = E_1 \amalg E_2 / \sim$$

mit der Äquivalenzrelation, die erzeugt wird von $v_1 \sim f(v_1)$ für alle $v_1 \in E_1$ mit $p_1(v_1) \in X_0$ ein K-Vektorbündel über X ist. Dies ist Lemma 3.7 aus der Vorlesung.

Lösung: Sei $p\colon E \to X$ die Abbildung, die von p_1 und p_2 induziert wird. Wir zeigen, dass E zusammen mit p ein K-Vektorbündel ist. Die Abbildung f ist ein Isomorphismus von K-Vektorbündeln, also erhält die Äquivalenzrelation die Vektorraumstruktur auf den Fasern. Es bleibt daher nur zu zeigen, dass E lokal trivial ist. Aufgrund der lokalen Trivialität von E_1 und E_2 existieren lokale Trivialisierungen für die Punkte in $j_1(X_1 \setminus X_0)$ und $j_2(X_2 \setminus i_2(X_0))$.

Sei also $x = j_2 \circ i_2(x_0)$ für ein $x_0 \in X_0$. Da X_2 ein kompakter Hausdorffraum ist, ist er insbesondere lokal kompakt. Jede offene Umgebung von $i_2(x_0)$ enthält damit eine abgeschlossene Umgebung von $i_2(x_0)$. Also existiert eine abgeschlossene Umgebung V_2 von $i_2(x_0)$ mit einer Trivialisierung $\varphi_2\colon\ E_2|_{V_2} \to V_2 \times K^n$. Sei jetzt $W_1 = i_2^{-1}(V_2)$ und

$$\varphi_1 = \iota_2^* \varphi_2|_{W_1 \cap X_0} \circ f\colon\ E_1|_{W_1 \cap X_0} \to i_2^* E_2|_{W_1 \cap X_0} \to (W_1 \cap X_0) \times K^n \ .$$

Dann ist φ_1 ein Isomorphismus von K-Vektorbündeln. Da $W_1 \cap X_0$ kompakt ist, also insbesondere abgeschlossen, existiert eine Umgebung $V_1 \supset W_1 \cap X_0$ und ein Isomorphismus $\psi_1\colon\ E_1|_{V_1} \to V_1 \times K^n$, der φ_1 fortsetzt. Somit ist

$$\psi_1 \cup_f \varphi_2\colon\ E|_{j_1(V_1) \cup j_2(V_2)} \to (j_1(V_1) \cup j_2(V_2)) \times K^n \ .$$

eine lokale Trivialisierung um x.