

Aufgaben zur Vorlesung K-Theorie und die Hopf-Invariante

Aufgabe 8. Sei $U(n) \subset M_n(\mathbb{C})$ die unitäre Gruppe, $GL_n(\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen und sei $T(n) \subset M_n(\mathbb{C})$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit positiven reellen Werten auf der Diagonalen.

- (a) Zeige, dass die Abbildung $\Phi: U(n) \times T(n) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ gegeben durch $\Phi(U, T) = U \cdot T$ ein Homöomorphismus ist.
- (b) Folgere hieraus, dass $U(n) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ eine Homotopieäquivalenz ist.
- (c) Zeige, dass $GL_n(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend ist.

Lösung: Sei $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Seien $A_1, \dots, A_n$ die Spalten von A . Wir wenden das Gram-Schmidt Verfahren auf A an. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die hermitesche Standardform auf $\mathbb{C}^n$, d.h. $\langle z, w \rangle = \sum_i \bar{z}_i w_i$. Sei $\|\cdot\|$ die davon induzierte Norm auf $\mathbb{C}^n$. Im ersten Schritt multiplizieren wir A_1 von rechts mit der Matrix

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|A_1\|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Dies ändert A_1 zu $A_1'' = \frac{A_1}{\|A_1\|}$ und lässt die anderen Spalten unverändert. Dann ändern wir A_2 zu $A_2' = A_2 - \langle A_1'', A_2 \rangle A_1''$ durch Multiplikation von rechts mit

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\langle A_1'', A_2 \rangle & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Anschließend multiplizieren wir A von rechts mit

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|A_2'\|} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

um A_2 zu $A_2'' = \frac{A_2}{\|A_2\|}$ zu ändern. Im nächsten Schritt multiplizieren wir mit

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\langle A_1'', A_3 \rangle & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\langle A_2'', A_3 \rangle & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

und setzen diesen Prozess fort, bis wir in der letzten Spalte angekommen sind. Die resultierende Matrix $U(A) = A \cdot T_1 \cdot T_2 \cdots T_m = (A_1'', A_2'', \dots, A_n'')$ ist unitär. Außerdem ist das Produkt $T(A) = T_m^{-1} \cdots T_1^{-1}$ der Inversen aller oberen Dreiecksmatrizen T_i ein Element von $T(n)$, das stetig von A abhängt. Also erhalten wir eine stetige Abbildung $\Psi: GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow U(n) \times T(n)$ gegeben durch $\Psi(A) = (U(A), T(A))$. Da $U(A) \cdot T(A) = A$, gilt $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{GL_n(\mathbb{C})}$. Also ist Φ surjektiv. Um zu sehen, dass Φ auch injektiv ist, seien $(U, T), (U', T') \in U(n) \times T(n)$ mit $A = U \cdot T = U' \cdot T'$. Dann ist $(U')^{-1}U = T' T^{-1}$, also liegen beiden Seiten in $U(n) \cap T(n) = \{1\}$. Somit folgt $U = U'$ und $T = T'$. Dies zeigt (a). Jedes Element $T \in T(n)$ lässt sich in eindeutiger Weise als $T = D(T) + R(T)$ schreiben, wobei $D(T)$ eine Diagonalmatrix ist und $R(T)$ eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen. Dann ist $h: T(n) \times I \rightarrow T(n)$ gegeben durch

$$h_t(T) = t D(T) + (1 - t) 1 + t R(T)$$

eine Homotopie mit $h_1(T) = T$ und $h_0(T) = 1$. Die Abbildung $U(n) \rightarrow U(n) \times T(n) \cong GL_n(\mathbb{C})$ ist somit eine Homotopieäquivalenz, da $T(n)$ zusammenziehbar ist. Dies zeigt (b). Wir müssen für (c) nur noch zeigen, dass $U(n)$ wegzusammenhängend ist. Sei $U \in U(n)$ eine unitäre Matrix. Es reicht einen Weg von U nach 1 zu konstruieren. Es gibt ein $V \in U(n)$, so dass $U = V D V^*$ für eine Diagonalmatrix D mit Einträgen $z_i \in S^1$. Da S^1 wegzusammenhängend ist, gibt es Wege $\gamma_i: I \rightarrow S^1$ mit $\gamma_i(0) = 1$ und $\gamma_i(1) = z_i$. Also ist $\gamma: I \rightarrow U(n)$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

eine Pfad von 1 nach D in $U(n)$. Also ist $V \gamma(t) V^*$ ein Pfad von 1 nach U .