K-Theorie und die Hopf-Invariante

Überblick:

<u>Def.</u>: Eine $\mathbb{R}$-Algebra A mit 1 (nicht notwendigerweise assoziativ) heißt <u>Divisionsalgebra</u>, falls jedes Element $a \neq 0$ invertierbar ist.

<u>Bsp.</u>: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$
↳ Cayley-Zahlen

Wir wollen beweisen:

<u>Thm 1.1</u> (Adams): Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathbb{R}^n$ besitzt die Struktur einer reellen Divisionsalgebra.

(ii) Entweder ist $n=1$ oder $n \geq 2$ ist gerade und es gibt $f: S^{2n-1} \longrightarrow S^n$ mit <u>Hopf-Invariante 1</u>.

(iii) $n \in \{1, 2, 4, 8\}$

<u>Inhalt</u>:
1) Verallgemeinerte Kohomologietheorien
2) Vektorbündel
3) K-Theorie
   3.1) Produkte in K-Theorie
   3.2) Bott-Periodizität
   3.3) Thom-Isomorphismus
4) Hopf-Invariante und Beweis des Satzes

§1. Kohomologietheorien

<u>Def. 1.1</u>: Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein <u>Kontravarianter</u> Funktor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$

·) ordnet jedem Objekt $c \in Ob(\mathcal{C})$ ein Objekt $F(c) \in Ob(\mathcal{D})$ zu

·) ordnet jedem Morphismus $f: c \to c'$ in $Mor_{\mathcal{C}}(c, c')$ einen Morphismus $F(f): F(c') \longrightarrow F(c)$ zu so dass folgende Eigenschaften gelten:

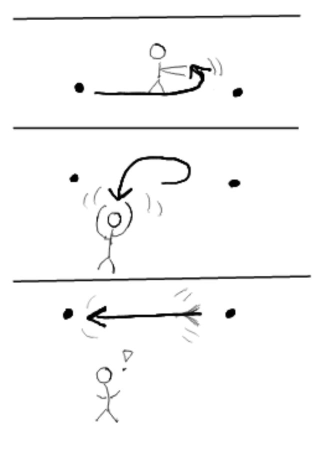
-) für $f: c \to c'$ und $g: c' \to c''$ gilt:
$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$

-) $F(id_c) = id_c$ für alle Objekte $c \in Ob(\mathcal{C})$

<u>Bsp.</u>: $Vekt_K$ die Kategorie der K-Vektorräume für einen Körper K mit K-linearen Abb. als Morphismen

$*: Vekt_K \longrightarrow Vekt_K$ Dualraumfunktor

$$V \longmapsto V^*$$
$$f: V \to W \longmapsto f^*: W^* \to V^*$$



Sei TOP^2 die Kategorie der Raumpaare (X, A).
Sei $V: TOP^2 \longrightarrow TOP^2$ der Funktor $(X, A) \longmapsto (A, \emptyset)$
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement.

Def 1.2: Eine <u>verallgemeinerte Kohomologietheorie</u> $h^* = (h^n, \partial^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit Werten in R-Moduln ist ein kontravarianter Funktor

$$h^*: TOP^2 \longrightarrow \text{Grad } R\text{-Mod}$$

zusammen mit einer natürlichen Transformation

$$\partial^*: h^* \circ V \longrightarrow h^{*+1}$$

so dass die folgenden Eigenschaften gelten

a) <u>Homotopieinvarianz</u>: Seien $f, g: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ homotope Abbildungen von Raumpaaren. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$: $h^n(f) = h^n(g)$

b) <u>Lange exakte Paarsequenz</u>: Sei (X, A) ein Raumpaar. Seien $(A, \emptyset) \xhookrightarrow{i} (X, \emptyset)$ und $j: (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Dann ist die Folge

$$\xrightarrow{\partial^{n-1}} h^n(X, A; R) \xrightarrow{h^n(j)} h^n(X, \emptyset; R) \xrightarrow{h^n(i)} h^n(A, \emptyset; R) \xrightarrow{\partial^n} h^{n+1}(X, A; R) \longrightarrow \dots$$

exakt.

c) <u>Ausschneidung</u>: Sei (X, A) ein Raumpaar, $U \subset A$ so, dass $\overline{U} \subset A$ (Abschluß in X).
Dann ist die von der Inklusion $\iota: (X\setminus U, A\setminus U) \longrightarrow (X, A)$ induzierte Abbildung $h^n(\iota): h^n(X, A; R) \longrightarrow h^n(X\setminus U, A\setminus U; R)$ ein Isomorphismus.

<u>Bemerkungen</u>:

i) Wir schreiben auch $h^n(X, A)$ für $h^n(X, A; \mathbb{Z})$ und f^* statt $h^n(f)$, falls sich der Grad n aus dem Kontext ergibt.

ii) $h^n(\{pt\}) =: h^n$ heißen die <u>Koeffizienten</u> der Kohomologietheorie

iii) Einige Kohomologietheorien besitzen ein <u>externes Produkt</u>, d.h. eine nat. Transformation

$$h^n(X, A) \times h^m(X', A') \xrightarrow{\times} h^{n+m}((X, A) \times (X', A')),$$

die bilinear und assoziativ ist. Hierbei ist $(X, A) \times (X', A') = (X \times X', X \times A' \cup A \times X')$.
Sei $\Delta: (X, A) \longrightarrow (X, A) \times (X, A)$ die Diagonalabb.
Falls ein externes Produkt für h^* existiert, ist $h^*(X, A)$ ein <u>graduierter Ring</u> mit der Multiplikation:

$$h^n(X, A) \times h^m(X, A) \xrightarrow{\times} h^{n+m}((X, A) \times (X, A)) \xrightarrow{\Delta^*} h^{n+m}(X, A).$$

Wir betrachten im folgenden Kohomologietheorien, die auf einer Unterkategorie TOP^2_{Kof} von TOP^2 definiert sind:

Def. 1.3: Ein Raumpaar (X, A) heißt <u>Ko-Raumpaar</u>, falls

- X ein kompakter Hausdorffraum ist,
- $A \subset X$ abgeschlossen ist,
- Die Inklusion $A \hookrightarrow X$ eine <u>Kofaserung</u> ist, d.h.:
  Für jede stetige Abb. $f: A \times I \cup X \times \{0\} \longrightarrow Y$ existiert $H: X \times I \longrightarrow Y$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

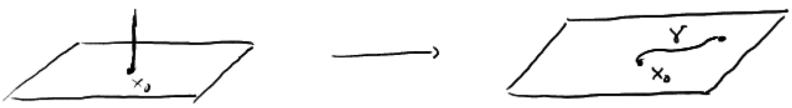
$$\begin{tikzcd} A \times I \cup X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ X \times I \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

TOP^2_{kof} ist die Kategorie der Ko-Raumpaare und stetigen Abbildungen.

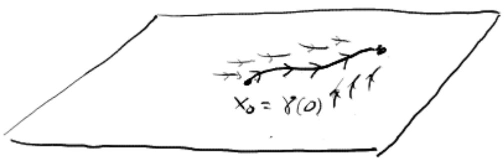
<u>Bsp.:</u>
- ·) X kompakter CW-Komplex, $A \subset X$ Unterkomplex
- ·) X kompakte Mannigfaltigkeit, A abgeschlossene Untermfkt.
- ·) Falls $(X, \{x_0\})$ ein Objekt in TOP^2_{kof} ist, dann heißt X <u>wohlpunktiert</u> (durch x_0).

Zur Veranschaulichung des Begriffs „Kofaserung": $X = [-1,1] \times [-1,1]$, $x_0 = (0,0)$, $Y = X$
Sei $\gamma : I \longrightarrow X$ ein Pfad mit $\gamma(0) = (0,0) = x_0$.
Erhalte Abbildung

$$\begin{tikzcd} f : \{x_0\} \times I \cup X \times \{0\} \arrow[r] \arrow[r, bend right=40, "\gamma"'] & X \end{tikzcd}$$



Kofaserung heißt in diesem Fall, dass der Raum X entlang des Pfades "mitgezogen" werden kann.



Allgemeiner: $A \hookrightarrow X$ ist eine Kofaserung, falls sich jedes Paar aus einer Homotopie $A \times I \xrightarrow{h} Y$ und einer "Startabbildung" auf X: $X \times \{0\} \longrightarrow Y$, die h_0 fortsetzt, zu einer Homotopie $X \times I \xrightarrow{H} Y$ erweitern lässt.