§ 2. Vektorbündel

Sei: $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. (Wir betrachten nur reelle und komplexe Vektorbündel.)

Def 2.1: Sei X ein top. Raum. Eine stetige Surjektion $p: E \longrightarrow X$ heißt <u>K-Vektorbündel</u>, falls gilt:

a) $p^{-1}(\{x\}) =: E_x$ ist ein Vektorraum für alle $x \in X$. E_x heißt auch die <u>Faser</u> von E über x.

b) $\forall x \in X$ gibt es eine Umgebung U, ein $n \in \mathbb{N}$ und einen Homöomorphismus $\varphi_U: p^{-1}(U) \longrightarrow U \times K^n$, so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times K^n \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

und die Einschränkung $\varphi_U|_{E_x}: E_x \longrightarrow K^n$ für alle $x \in U$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Bsp.:
- $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

  $TS^n = \{ (x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \underbrace{\langle x, v \rangle}_{\text{Standard skalar produkt}} = 0 \}$

  $p: TS^n \longrightarrow S^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorbündel über S^n.
  $(x, v) \longmapsto x$
- X beliebiger top. Raum, dann ist $X \times \mathbb{C}^n$ das <u>triviale</u> Vektorbündel uber X

Bem.: Die Abbildung $x \longmapsto \dim_K(E_x)$ ist stetig, also lokal konstant, d.h. über einem zusammenhängenden Raum hat ein Vektorbündel konstante Faserdimension.

Def. 2.2.: Seien $p: E \longrightarrow X$ und $p': E' \longrightarrow X'$ K-Vektorbündel. Ein <u>Morphismus</u> von Vektorbündeln (oder Vektorbündelhomomorphismus) von E nach E' ist ein Paar $(f, \bar{f})$ von stetigen Abbildungen $\bar{f}: E \longrightarrow E'$, $f: X \longrightarrow X'$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X' \end{tikzcd}$$

und so dass die Einschränkung

$\bar{f}|_{E_x}: E_x \longrightarrow E'_{f(x)}$

für alle $x \in X$ ein K-Vektorraumhom. ist.

Wir bezeichnen die Kategorie der endlichdim. K-Vektorbündel über einem top. Raum X zusammen mit den Morphismen der Form $(id_X, \bar{f})$ mit $\mathrm{Vekt}_K(X)$.

Operationen mit Vektorbündeln

Def. 2.3: Seien X, Y top. Räume. Sei $f: Y \longrightarrow X$ eine stetige Abb. und sei $p: E \longrightarrow X$ ein Vektorbündel. Dann heißt

$$f^*E = \{ (y,v) \in Y \times E \mid f(y) = p(v) \}$$

zusammen mit der Abbildung $q: f^*E \longrightarrow Y$, $(y,v) \longmapsto y$ der Pull back von $p: E \to X$ entlang von f.

Folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} \qquad \text{mit } \bar{f}(y,v) = v$$

Lemma 2.4: a) $q: f^*E \longrightarrow Y$ ist ein Vektorbündel und $(\bar{f}, f)$ ist ein Morphismus von Vektorbündeln.

b) $q: f^*E \longrightarrow Y$ ist durch die folgende universelle Eigenschaft eindeutig (bis auf Isomorphie) charakterisiert:
Sei $r: F \longrightarrow Z$ ein Vektorbündel, $(\bar{g}, g)$ ein Morphismus zwischen $r: F \longrightarrow Z$ und $p: E \longrightarrow X$, sei $g': Z \longrightarrow Y$ eine stetige Abb. mit $f \circ g' = g$. Dann existiert genau ein $G: F \longrightarrow f^*E$, so dass (G, g') ein Morphismus von Vektorbündeln ist und $(\bar{f}, f) \circ (G, g') = (\bar{g}, g)$.

Diagramm hierzu:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, bend left, "\bar{g}"] \arrow[r, dashed, "\exists!\, G"] \arrow[d, "r"'] & f^*E \arrow[r, "\bar{f}"'] \arrow[d, "q"] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "g'"'] \arrow[rr, bend left, "g"] & Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Beweis: Sei $y \in Y$. Sei $U \subset X$ Umgebung von $f(y)$ in X, so dass eine lokale Trivialisierung $\varphi_U: p^{-1}(U) \longrightarrow U \times K^n$ existiert. $V = f^{-1}(U)$ ist eine Umgebung von y und

$$q^{-1}(V) = \{ (y,v) \in V \times p^{-1}(U) \mid f(y) = p(v) \}$$

Sei $\psi_V: q^{-1}(V) \longrightarrow V \times K^n$; $\psi_V(y,v) = (y, pr_{K^n} \circ \varphi_U(v))$
sei $\kappa_V: V \times K^n \longrightarrow q^{-1}(V)$; $(y,w) \longmapsto (y, \varphi_U^{-1}(f(y), w))$

Dann gilt $\psi_V \circ \kappa_V = id_{V \times K^n}$ und $\kappa_V \circ \psi_V = id_{q^{-1}(V)}$. Außerdem kommutiert das Diagramm aus Def. 2.1 (b). Also ist ψ_V eine lokale Trivialisierung von $f^*E \to Y$ über V.

Der Beweis von (b) ist eine (einfache) Übungsaufgabe.

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Hieraus lässt sich eine neue Kategorie $\mathcal{C}^{op}$ definieren:

$$\mathrm{obj}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{obj}(\mathcal{C}), \quad \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(c, d) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(d, c)$$

mit der neuen Komposition:

$$\begin{aligned} \bullet : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(c', c'') \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(c, c') &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(c, c'') \\ (f, g) &\longmapsto f \bullet g = g \circ f \end{aligned}$$

Komposition in $\mathcal{C}$

(Kovariante) Funktoren $\mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$ entsprechen kontravarianten Funktoren $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$.
Sei $\mathrm{Vekt}_K = \mathrm{Vekt}_K(pt)$ die Kategorie der endlich dimensionalen K-Vektorräume und linearen Abbildungen. Ein Funktor

$$F : \underbrace{\mathrm{Vekt}_K \times \ldots \times \mathrm{Vekt}_K}_{r} \times \underbrace{\mathrm{Vekt}_K^{op} \times \ldots \times \mathrm{Vekt}_K^{op}}_{s} \longrightarrow \mathrm{Vekt}_K \qquad (*)$$

heißt <u>stetig</u>, falls die induzierte Abbildung

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Vekt}_K}(V_1, V_1') \times \ldots \times \mathrm{Mor}_{\mathrm{Vekt}_K}(V_r, V_r') \times \mathrm{Mor}_{\mathrm{Vekt}_K^{op}}(V_{r+1}, V_{r+1}') \times \ldots \times \mathrm{Mor}_{\mathrm{Vekt}_K^{op}}(V_{r+s}, V_{r+s}')$$
$$\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathrm{Vekt}_K}\left(F(V_1, \ldots V_r, V_{r+1}, \ldots V_{r+s}), F(V_1', \ldots V_r', V_{r+1}', \ldots V_{r+s}')\right)$$

stetig ist.

<u>Lemma 2.5</u>: Sei F ein stetiger Funktor wie in $(*)$ und sei X ein top. Raum. Dann induziert F einen Funktor

$$F_X : \mathrm{Vekt}_K(X) \times \ldots \times \mathrm{Vekt}_K(X) \times \mathrm{Vekt}_K(X)^{op} \times \ldots \times \mathrm{Vekt}_K(X)^{op} \longrightarrow \mathrm{Vekt}_K(X)$$

der verträglich ist mit Pullbacks und $F_{pt} = F$ erfüllt.

<u>Beweis</u>: Sei $m = r+s$. Definiere $F_X(E^{(1)}, \ldots, E^{(m)}) = \coprod_{x \in X} F(E_x^{(1)}, \ldots E_x^{(m)})$ als Menge.

Sei U_i eine offene Überdeckung von X, so dass lokale Trivialisierungen
$$\varphi_i^{(k)} : (p^{(k)})^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times K^{e_k}$$
existieren. F induziert Bijektionen

$$F_{U_i}(\varphi_i^{(1)}, \ldots \varphi_i^{(m)}) : F_{U_i}((p^{(1)})^{-1}(U_i), \ldots (p^{(m)})^{-1}(U_i)) \longrightarrow U_i \times F(K^{e_1}, \ldots K^{e_m})$$

Jetzt gibt es eine eindeutige Topologie auf $F_X(E^{(1)}, \ldots E^{(m)})$, so dass die Abbildungen $\psi_i = F_{U_i}(\varphi_i^{(1)}, \ldots \varphi_i^{(m)})$ Homöomorphismen werden, wobei $U_i \times F(K^{e_1}, \ldots K^{e_m})$ die Produkttopologie trägt: Eine Menge $V \subset F_X(E^{(1)}, \ldots E^{(m)})$ ist offen, falls sie die Vereinigung von Mengen der Form $\psi_i^{-1}(V_i)$ mit $V_i \subset U_i \times F(K^{e_1}, \ldots, K^{e_m})$ offen

Damit diese Definition konsistent ist, müssen wir folgendes prüfen:

Sei $V \subset (U_i \cap U_j) \times F(K^{e_1}, \ldots, K^{e_m})$ offen. Wir haben zu zeigen, dass dann auch $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(V)$ offen ist. Aber $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, v) = (x, \psi_{ij}(x)(v))$ für eine Abbildung:

$$\psi_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \underbrace{\mathrm{End}_K}_{K\text{-lineare Endomorphismen}} (F(K^{e_1}, \ldots, K^{e_m}))$$

Es gilt $\psi_{ij} = F(\psi_{ij}^{(1)}, \ldots, \psi_{ij}^{(m)})$ für stetige Abbildungen $\psi_{ij}^{(k)} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{End}_K(K^{e_k})$.

Da F stetig ist, folgt, dass alle ψ_{ij} stetig sind, folglich auch $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$. Somit ist $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(V)$ offen.

Es ist damit klar, dass $F_X(E^{(1)}, \ldots, E^{(m)}) \longrightarrow X$ ein Vektorbündel ist, denn wir haben lokale Trivialisierungen konstruiert. Ferner gilt per Definition für eine stetige Abb. $f : Y \longrightarrow X$:

$$f^* F_X(E^{(1)}, \ldots, E^{(m)}) \cong F_Y(f^* E^{(1)}, \ldots, f^* E^{(m)}). \qquad \square$$

Beispiele:

- $\oplus : \mathrm{Vekt}_K \times \mathrm{Vekt}_K \longrightarrow \mathrm{Vekt}_K$ ist stetig
  $\Rightarrow$ direkte Summe von Vektorbündeln

- $\otimes : \mathrm{Vekt}_K \times \mathrm{Vekt}_K \longrightarrow \mathrm{Vekt}_K$ ist stetig
  $\Rightarrow$ Tensorprodukt von Vektorbündeln

- Dualisieren von Vektorräumen
  $* : \mathrm{Vekt}_K^{op} \longrightarrow \mathrm{Vekt}_K$ ist stetig
  $\Rightarrow$ duales Vektorbündel

- $\mathrm{Hom} : \mathrm{Vekt}_K \times \mathrm{Vekt}_K^{op} \longrightarrow \mathrm{Vekt}_K$
  $(V, W) \longmapsto \mathrm{Hom}_K(W, V)$ ist stetig
  K-lineare Abb.
  $\Rightarrow$ Homomorphismenbündel $\mathrm{Hom}(E, F)$

Seien $p : E \longrightarrow X$ und $q : F \longrightarrow X$ K-Vektorbündel. Dann ist $E \times F \xrightarrow{(p,q)} X \times X$ auch ein Vektorbündel, wenn $E_x \times F_x$ die Vektorraumstruktur der äußeren direkten Summe trägt.

Übungsaufgabe: Sei $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ die Diagonalabbildung. Zeige, dass
$$\Delta^*(E \times F) \cong E \oplus F \quad \text{als Vektorbündel über } X.$$

Homotopieinvarianz von Pullback-Vektorbündeln

Zur Erinnerung: Ein top. Raum heißt <u>normal</u>, falls sich zwei disjunkte abg. Mengen durch offene Mengen trennen lassen, d.h. für $A \subset X$, $B \subset X$ beide abg. mit $A \cap B = \emptyset$ existieren $A \subset U$, $B \subset V$ offen mit $U \cap V = \emptyset$.

<u>Satz 2.6</u> (Fortsetzungssatz von Tietze): Sei X ein normaler top. Raum, sei $A \subset X$ abg. und sei V ein endlich dim. K-Vektorraum. Zu jeder stetigen Abb. $f: A \longrightarrow V$ existiert eine stetige Abb. $F: X \longrightarrow V$ mit $F|_A = f$.

<u>Bemerkung</u>: Jeder kompakte Hausdorffraum ist normal (Übungsaufgabe!)

<u>Def.</u>: Sei $p: E \longrightarrow X$ ein K-Vektorbündel über einem top. Raum X. Ein <u>Schnitt</u> von E ist eine stetige Abb. $s: X \longrightarrow E$ mit $p \circ s = id_X$ (d.h. $s(x) \in E_x$).
Jedes Vektorbündel besitzt einen Schnitt (den Nullschnitt $s(x) = 0_x \in E_x$).

<u>Lemma 2.7</u>: Sei X ein kompakter Hausdorffraum, $A \subset X$ abgeschlossen. Seien $p: E \longrightarrow X$ und $p': E' \longrightarrow X$ K-Vektorbündel. Dann gilt:

a) Jeder Schnitt $s: A \longrightarrow E$ lässt sich zu einem Schnitt $\bar{s}: X \longrightarrow E$ fortsetzen.

b) Sei $\iota: A \hookrightarrow X$ die Inklusion. Sei $E|_A := \iota^* E$ und $E'|_A = \iota^* E'$. Sei $f: E|_A \longrightarrow E'|_A$ ein Morphismus von Vektorbündeln. Dann existiert ein Morphismus $\hat{f}: E \longrightarrow E'$, der f fortsetzt. Ist f ein Isomorphismus, dann existiert eine offene Menge $U \supset A$, so dass $\hat{f}|_U : E|_U \longrightarrow E'_U$ ein Isomorphismus von Vektorbündeln ist.

<u>Beweis</u>: zu a): Wähle endliche Überdeckung $(U_i)_{i=1\dots n}$ von X, so dass lokale Trivialisierungen $\varphi_i : E|_{U_i} \longrightarrow U_i \times K^n$ existieren. Nach dem Fortsetzungssatz lässt sich $pr_{K^n} \circ \varphi_i \circ s|_{U_i \cap A}$ zu einer Abb. auf U_i fortsetzen, also auch $s|_{U_i \cap A}$ selbst.
Sei $\bar{s}_i$ eine solche Fortsetzung. Sei $\psi_i : U_i \longrightarrow [0,1]$ eine Partition der Eins.
Sei $\bar{s} = \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot \bar{s}_i$. Dann gilt $\bar{s}|_A = \sum_{i=1}^n \psi_i \, s|_{U_i \cap A} = s$.

zu b): Die Morphismen $E \xrightarrow{f} E'$ von Vektorbündeln entsprechen den Schnitten des Vektorbündels $\mathrm{Hom}(E, E')$ wie folgt: Jedem f lässt sich ein Schnitt $s_f(x)(v) = f(v)$ (mit $v \in E_x$) zuordnen und jedem Schnitt $s: X \longrightarrow \mathrm{Hom}(E, E')$ entspricht ein Morphismus $f_s(v) = s(p(v))(v)$.
Somit folgt der erste Teil der Aussage aus a).
Sei $\pi: \mathrm{Hom}(E, E') \longrightarrow X$ die Bündelabb. Sei

$$\begin{array}{l} \mathrm{Iso}(E, E') = \{ g \in \mathrm{Hom}(E, E') \mid g: E_{\pi(g)} \longrightarrow E_{\pi'(g)} \text{ ist ein Isomorphismus} \} \\ \cap \\ \mathrm{Hom}(E, E') \end{array}$$

Dann ist $\mathrm{Iso}(E, E')$ ein lokal triviales Bündel, allerdings Kein Vektorbündel (die Faser an jedem Punkt ist homöomorph zu $GL_n(K)$ für ein $n \in \mathbb{N}$). Da $GL_n(K) \subset M_n(K)$ offen ist und $\mathrm{Iso}(E, E')$ lokal trivial ist, folgt, dass $\mathrm{Iso}(E, E') \subset \mathrm{Hom}(E, E')$ offen ist. Sei $U = \hat{f}^{-1}(\mathrm{Iso}(E, E'))$. Dann hat U die in b) geforderten Eigenschaften. □

Lemma 2.8: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei X ein top. Raum und sei $p: E \to X \times [a,b]$ ein K-Vektorbündel. Es gebe $c \in (a, b)$, so dass $E|_{X \times [a,c]}$ und $E|_{X \times [c,b]}$ trivialisierbar sind. Dann ist auch E trivialisierbar.

Beweis: Wir Können den Beweis für jede Komponente von X einzeln führen und daher o.B.d.A. annehmen, dass X zusammenhängend ist. Dann ist die Dimension der Faser von E Konstant.

Seien
$$\varphi_a: X \times [a, c] \times K^n \xrightarrow{\cong} E|_{X \times [a,c]} \quad \text{und}$$
$$\varphi_b: X \times [c, b] \times K^n \xrightarrow{\cong} E|_{X \times [c,b]} \quad \text{Trivialisierungen.}$$

Sei $h = (\varphi_b|_{X \times \{c\} \times K^n})^{-1} \circ (\varphi_a|_{X \times \{c\} \times K^n}) : X \times \{c\} \times K^n \longrightarrow X \times \{c\} \times K^n$, dann ist h ein Isomorphismus eines trivialen K-Vektorbündels über X. Dieser hat die Form $h(x, v) = (x, g(x) \cdot v)$ für eine stetige Abbildung $g: X \longrightarrow GL_n(K)$. Sei jetzt
$$w: X \times [c, b] \times K^n \longrightarrow X \times [c, b] \times K^n$$
$$(x, t, w) \longmapsto (x, t, g(x) \cdot w)$$
ebenfalls ein Iso. von Vektorbündeln

Dann gilt $\varphi_a|_{X \times \{c\} \times K^n} = \varphi_b \circ w|_{X \times \{c\} \times K^n}$. Daher Können wir diese beiden Abb. zu einem Isomorphismus von Vektorbündeln
$$X \times [a, b] \times K^n \longrightarrow E$$
zusammensetzen. □

Lemma 2.9: Sei X ein Kompakter Raum. Sei $p: E \longrightarrow X \times I$ ein K-Vektorbündel. Dann gibt es eine endliche offene Überdeckung $\{U_i\}_{i=1}^n$ von X, so dass $E|_{U_i \times I}$ trivialisierbar ist.

Beweis: Sei $x \in X$ und $t \in I$. Dann existieren offene Umgebungen $x \in U(t) \subset X$ und $t \in I(t) \subset I$, so dass $E|_{U(t) \times I(t)}$ trivialisierbar ist. Da I Kompakt ist, existiert eine endliche Folge $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ zusammen mit offenen Umgebungen U_i so, dass $E|_{U_i \times [t_{i-1}, t_i]}$ trivialisierbar ist.

Sei $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Nach Lemma 2.8 ist $E|_{U \times I}$ trivialisierbar.

Da $X \times I$ Kompakt ist, wird es von endlich vielen solchen Mengen überdeckt. □

Theorem 2.10: Sei X ein kompakter Raum und sei $p: E \longrightarrow X \times I$ ein K-Vektorbündel. Sei $E_1 = E|_{X \times \{1\}}$.

a) Es gibt einen Isomorphismus von Vektorbündeln über $X \times I$:
$$\rho: E \xrightarrow{\cong} E_1 \times I$$
mit $\rho|_{X \times \{1\}} = id_{E_1}$.

b) Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar, $h: X \times I \longrightarrow Y$ eine stetige Abb. und $p': E' \longrightarrow Y$ ein K-Vektorbündel mit $E \cong h^* E'$. Falls jetzt $h_t(a) = h_0(a)$ für alle $a \in A$ und alle $t \in I$ gilt, dann kann man den Isomorphismus aus a) so wählen, dass er den durch h induzierten Isomorphismus $E|_{A \times I} \xrightarrow{\cong} E_1|_A \times I$ fortsetzt.

Beweis: Nach Lemma 2.9 können wir eine Überdeckung von $X \times I$ durch offene Mengen der Form $U_i \times I$ mit $i \in \{1, \ldots, N\}$ finden, so dass $E|_{U_i \times I}$ trivialisierbar ist. Seien

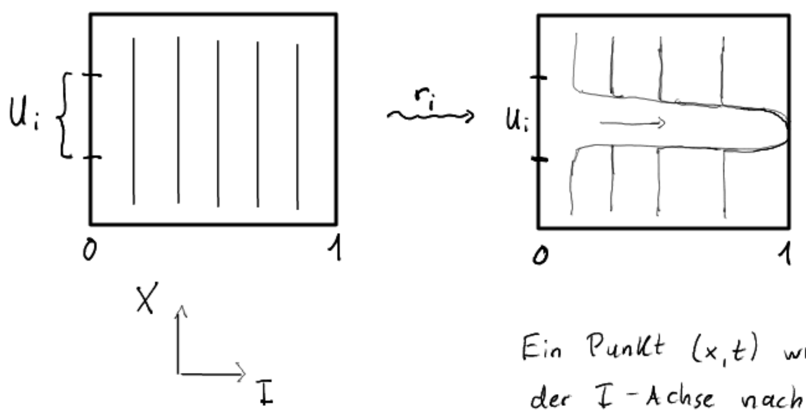
$$h_i: U_i \times I \times K^n \longrightarrow E|_{U_i \times I}$$

Trivialisierungen. Seien $\eta_i: X \longrightarrow [0,1]$ stetige Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\operatorname{supp}(\eta_i) \subset U_i$

ii) $\max\limits_{i=1 \ldots N} \eta_i(x) = 1$ für alle $x \in X$.

Sei $r_i: X \times I \longrightarrow X \times I$ gegeben durch $r_i(x,t) = (x, \max(\eta_i(x), t))$



Ein Punkt (x,t) wird entlang der I-Achse nach rechts verschoben. Der Wert der Verschiebung hängt von η_i ab.

Nun konstruieren wir einen Morphismus von K-Vektorbündeln (u_i, r_i) über r_i wie folgt:

$$u_i(h_i(x,t,v)) := h_i(r_i(x,t), v) \quad \text{für } (x,t,v) \in U_i \times I \times K^n$$

Wir setzen $u_i = id$ außerhalb des Bildes von h_i. Wegen $r_i|_{X \setminus U_i \times I} = id|_{X \setminus U_i \times I}$ ist dies stetig. Außerdem kommutiert

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u_i"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ X \times I \arrow[r, "r_i"'] & X \times I \end{tikzcd}$$

und u_i ist auf den Fasern linear.

Sei $r = r_N \circ r_{N-1} \circ \dots \circ r_2 \circ r_1$. Wegen ii) gilt $r(x,t) = (x,1)$.
Sei $u = u_N \circ u_{N-1} \circ \dots \circ u_2 \circ u_1$. Dann ist (u,r) ein Morphismus von Vektorbündeln und $(u,r)|_{X\times\{1\}} = \mathrm{id}_{E_1}$. Außerdem haben wir

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "(u{,}r)"] \arrow[dr] & E \\ & E_1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

und wir bezeichnen die Einschränkung

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E_1 \arrow[d, "p_1"] \\ X\times I \arrow[r, "r"] & X\times\{1\} \end{tikzcd}$$

auch mit (u,r).

Setze jetzt $\rho : E \longrightarrow E_1 \times I$, $v \longmapsto (u(v), p(v))$, dann ist $(\rho, \mathrm{id}_{X\times I})$ ein Isomorphismus von Vektorbündeln mit $\rho|_{E\times\{1\}} = \mathrm{id}$.
Dies zeigt a).

Für b) sei $V_j \subset Y$ eine offene Überdeckung von Y, so dass $E'|_{\overline{V_j}}$ trivialisierbar ist.
Sei $B_j = h^{-1}(\overline{V_j}) \subset X \times I$. Es gilt:

$$B_j \cap (A\times I) = \underbrace{\left(h_1^{-1}(\overline{V_j}) \cap A\right)}_{A_j} \times I \quad \text{da } h \text{ konstant auf } A \text{ ist.}$$

Nach Konstruktion ist $E|_{A_j\times I}$ trivialisierbar. Nach Lemma 2.7 b) finden wir eine

offene Umgebung $U_j \times I$ mit $X \supset U_j \supset A_j$, so dass $E|_{U_j\times I}$ trivialisierbar ist.

Wir ergänzen die Mengen $U_j \times I$ um trivialisierende offene Umgebungen $U_i \times I$ mit $U_i \cap A = \emptyset$. Jetzt verwenden wir die Konstruktion aus dem Beweis von a) für diese Überdeckung. Die entsprechende Abbildung

$$\rho|_{A_j\times I} : E|_{A_j\times I} \longrightarrow E_1|_{A_j} \times I$$

stimmt mit dem von h induzierten Morphismus überein. □

Das folgende Korollar ist von entscheidender Bedeutung für die Definition von topologischer K-Theorie.

<u>Korollar 2.11:</u> Sei X ein kompakter Raum und $h: X\times I \longrightarrow Y$ eine Homotopie. Sei $p: E \longrightarrow Y$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel. Dann gilt:

a) $h_0^* E \cong h_1^* E$ als Vektorbündel über X
(Pullbacks sind homotopieinvariant bis auf Isomorphie.)

b) Falls (X,A) ein Ko-Raumpaar ist und h stationär auf A ist, dann kann der Isomorphismus so gewählt werden, dass er über A die Identität ist.