

§ 3. Topologische K-Theorie

Im letzten Kapitel haben wir folgenden kontravarianten, homotopie invarianten Funktor kennen gelernt:

$$\begin{aligned} \text{TOP} &\longrightarrow \text{MONOIDE} \\ X &\longmapsto \text{Vekt}_K(X) / \sim_{\text{iso}} \\ (f: X \rightarrow Y) &\longmapsto f^* \end{aligned}$$

mit Monoid-Operation $[E]_{\text{iso}} + [F]_{\text{iso}} := [E \oplus F]_{\text{iso}}$ und dem Nullvektorbündel als neutralem Element.

Hieraus wollen wir eine Gruppe konstruieren:

Grothendieck-Konstruktion: Sei $(M, +)$ ein kommutativer Monoid. Betrachte

$$\text{Gr}(M) = M \times M / \sim \text{ mit der Äquivalenzrelation}$$

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \exists c \in M \text{ mit } x + y' + c = x' + y + c$$

! dahinter ist: $[x, y] \stackrel{u}{=} x - y$. Zusammen mit der Operation

$$+ : \text{Gr}(M) \times \text{Gr}(M) \longrightarrow \text{Gr}(M) ; ([x, y], [x', y']) \longmapsto [x + x', y + y']$$

ist $\text{Gr}(M)$ eine abelsche Gruppe. Das inverse Element zu $[x, y]$ ist $[y, x]$, denn $[x + y, x + y] = [0, 0]$. Außerdem ist $M \longrightarrow \text{Gr}(M)$ ein Monoidhomomorphismus.

$$x \longmapsto [x, 0]$$

$\text{Gr}(M)$ hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu jedem Monoidhom. $\varphi: M \rightarrow A$ in eine abelsche Gruppe A existiert genau ein Gruppenhom. $\psi: \text{Gr}(M) \rightarrow A$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow & \nearrow \exists! \psi & \\ \text{Gr}(M) & & \end{array} \quad \text{Kommutiert. Beweis: Übung!}$$

Wir könnten also $K^0(X) = \text{Gr}(\text{Vekt}_C(X) / \sim_{\text{iso}})$ definieren, um eine abelsche Gruppe zu erhalten. Es bleiben dann aber die Fragen

-) Was ist $K^n(X)$ für $n \neq 0$?
-) Was ist $K^n(X, A)$ für ein Ko-Raumpaar?

Def. 3.1: Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar.

- i) Ein Tripel (E_1, f, E_0) über (X, A) besteht aus endlich dim. $\mathbb{C}$ -Vektorbündeln $p_i: E_i \rightarrow X$ und einem Isomorphismus $f: E_1|_A \longrightarrow E_0|_A$.

- ii) Ein Morphismus von Tripeln $(E_1, f, E_0) \longrightarrow (E'_1, f', E'_0)$ besteht aus einem Paar (g_1, g_0) mit Morphismen von Vektorbündeln $g_i: E_i \longrightarrow E'_i$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E_1|_A & \xrightarrow{g_1|_A} & E'_1|_A \\ \downarrow f & & \downarrow \\ E_0|_A & \xrightarrow{g_0|_A} & E'_0|_A \end{array}$$

- iii) Tripel der Form (E, id_E, E) heißen elementar.
 iv) (E_1, f, E_0) und (E'_1, f', E'_0) heißen stabil isomorph, falls Vektorbündel $E \longrightarrow X$ und $E' \longrightarrow X$ existieren, so dass

$$(E_1 \oplus E, f \oplus \text{id}, E_0 \oplus E) \cong (E'_1 \oplus E', f' \oplus \text{id}, E'_0 \oplus E')$$

(d.h. falls sie isomorph werden nach Addition elementarer Tripel).

Bemerkungen: •) Stabile Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf Tripeln.

-) Tripel lassen sich addieren, d.h.

$$[E_1, f, E_0]_{st} + [E'_1, f', E'_0]_{st} := [E_1 \oplus E'_1, f \oplus f', E_0 \oplus E'_0]_{st}$$

ist wohldefiniert. Das Tripel $[0, \text{id}, 0]_{st}$ ist ein neutrales Element hierfür.

-) $[E_1, f, E_0]_{st} = [0, \text{id}, 0]_{st}$ genau dann, wenn ein Vektorbündel $E \longrightarrow X$ existiert, so dass sich $E_1 \oplus E|_A \xrightarrow[\cong]{f \oplus \text{id}} E_0 \oplus E|_A$ zu einem Isomorphismus über ganz X ausdehnen lässt.

Beweis hierzu:

$\Rightarrow$: Sei $(E_1 \oplus E, f \oplus \text{id}_E, E_0 \oplus E) \xrightarrow[\varphi]{\cong} (E', \text{id}_{E'}, E')$ ein Isomorphismus von Tripeln, dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} E_1 \oplus E|_A & \xrightarrow[\cong]{\varphi_1} & E'|_A \\ \downarrow f \oplus \text{id} & & \downarrow \text{id}_{E'} \\ E_0 \oplus E|_A & \xrightarrow[\cong]{\varphi_0} & E'|_A \end{array}$$

Der Isomorphismus

$$\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1: E_1 \oplus E \xrightarrow{\cong} E_0 \oplus E$$

ist auf ganz X definiert

und erfüllt:

$$\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1|_A = f \oplus \text{id}.$$

$\Leftarrow$: Sei $\psi: E_1 \oplus E \xrightarrow{\cong} E_0 \oplus E$ mit $\psi|_A = f \oplus \text{id}_E$ gegeben, dann kommutiert folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E_1 \oplus E|_A & \xrightarrow[\cong]{\psi|_A} & E_0 \oplus E|_A \\ f \oplus \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ E_0 \oplus E|_A & \xrightarrow[\cong]{\text{id}} & E_0 \oplus E|_A \end{array}$$

also ist $(\psi, id) : (E_1 \otimes E, f \otimes id, E_0 \otimes E) \longrightarrow (E_0 \otimes E, id, E_0 \otimes E)$
die gesuchte stabile Isomorphie. $\square$

Def 3.2.: Sei (X, A) ein Ko -Raumpaar. Wir definieren $K^0(X, A)$ als die Menge der stabilen Isomorphieklassen von Tripeln über (X, A) . $K^0(X, A)$ heißt auch die 0-te K -Gruppe von (X, A) . Für $n > 0$ definieren wir

$$K^{-n}(X, A) := K^0((X, A) \times (I, \partial I)^n)$$

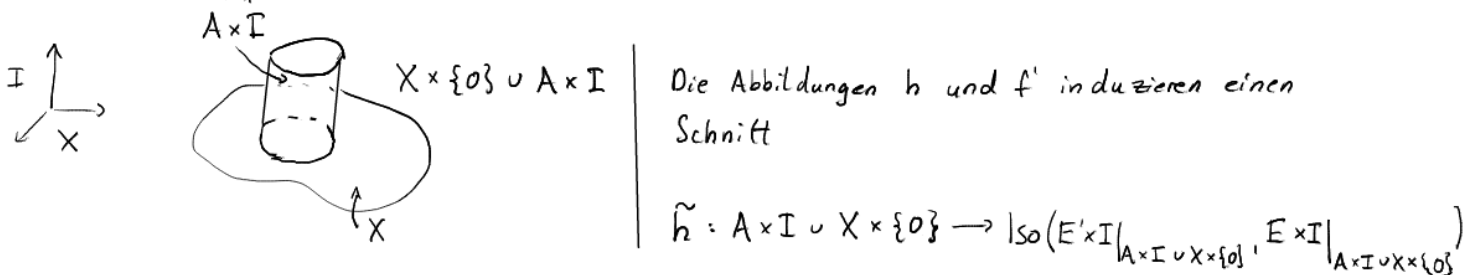
und $K^{-n}(X) := K^{-n}(X, \emptyset)$.

Übungsaufgabe: Zeige, dass $K^0(X) \cong \text{Gr}(\text{Vekt}_{\mathbb{C}}(X)/\sim_{iso})$.

Wir wissen bisher nur, dass $K^0(X, A)$ ein Monoid ist (bezüglich + von Tripeln). Um zu sehen, dass dies tatsächlich eine Gruppenstruktur liefert brauchen wir zwei Lemmata.

Lemma 3.3: Sei (X, A) ein Ko -Raumpaar. Seien $p: E \rightarrow X$ und $p': E' \rightarrow X$ K -Vektorbündel und $f: E'|_A \rightarrow E|_A$ ein Isomorphismus. Sei $f': E' \rightarrow E$ ein Isomorphismus von K -Vektorbündeln und sei $h: A \times I \rightarrow \text{Iso}(E' \times I|_{A \times I}, E \times I|_{A \times I})$ ein Schnitt, so dass $h_0 = f'|_A$, $h_1 = f$ gilt. Dann existiert ein Isomorphismus $F: E' \rightarrow E$ mit $F|_A = f$ und ein Schnitt $H: X \times I \rightarrow \text{Iso}(E' \times I, E \times I)$ mit $H_0 = f'$, $H_1 = F$ und $H|_{A \times I} = h$.

Beweis: Die Idee ist, h zu einer Homotopie H auf ganz X auszu dehnen und dann $F = H_1$ zu setzen.



Wir müssen $\tilde{h}$ zu einem Schnitt $X \times I \rightarrow \text{Iso}(E' \times I, E \times I)$ ausdehnen.

Ein solcher Schnitt entspricht einem Iso. $E' \times I \rightarrow E \times I$.

Idee: Nutze Kofaserungseigenschaft.

Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} A \times I \cup X \times \{0\} & \xrightarrow{id} & A \times I \cup X \times \{0\} & \xhookrightarrow{\quad} & X \times I \\ \downarrow & & \nearrow & & \\ X \times I & & & & \end{array}$$

r existiert nach Kofaserungseigenschaft

Seien $p_X: X \times I \rightarrow X$ und $p_I: X \times I \rightarrow I$ die Projektionen. Sei

$$r_X = p_X \circ L \circ r, \quad r_I = p_I \circ L \circ r.$$

Sei $K: (X \times I) \times I \longrightarrow X \times I$

$$K(x, t, s) = (r_x(x, s \cdot t), sr_I(x, t) + (1-s) \cdot t)$$

dann gilt $K(x, t, 0) = (x, t)$ und $K(x, t, 1) = (\text{cor})(x, t)$
also ist cor homotop zu $\text{id}_{X \times I}$.

Folglich existiert ein Morphismus $(\bar{r}, r)$ von Vektorbündeln mit $\bar{r}$ gegeben durch
aus Pullback

$$E \times I \cong (\text{cor})^*(E \times I) \cong r^* \iota^*(E \times I) \xrightarrow{\quad} \iota^* E \times I = E|_A \times I \cup E \times \{0\}$$

ebenso gibt es $\bar{r}': E' \times I \longrightarrow E'|_A \times I \cup E' \times \{0\}$, so dass $(\bar{r}', r)$ ein Morphismus von Vektorbündeln ist.

Betrachte jetzt das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} E' \times I & \xrightarrow{\bar{r}'} & E'|_A \times I \cup E' \times \{0\} & & \\ \downarrow & \searrow \bar{H} & \downarrow & \swarrow \cong & \text{induziert von } \tilde{h} \\ & E \times I & \xrightarrow{\bar{r}} & E|_A \times I \cup E \times \{0\} & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X \times I & \xrightarrow{\quad} & A \times I \cup X \times \{0\} & & \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} & & \\ & X \times I & \xrightarrow{\quad} & A \times I \cup X \times \{0\} & \end{array}$$

Nach den obigen Überlegungen ist die vordere Seite des Würfels ein Pullback-Diagramm, denn $E|_A \times I \cup E \times \{0\} \cong \iota^*(E \times I)$ und $r^* \iota^*(E \times I) \cong E \times I$.

Daher existiert $\bar{H}$ wie oben angedeutet, so dass $(\bar{H}, \text{id}_{X \times I})$ ein Morphismus von Vektorbündeln ist. Pullbacks von Isomorphismen sind wieder Isomorphismen, daher ist $\bar{H}: E' \times I \longrightarrow E \times I$ ein Isomorphismus, der einem Schnitt $H: X \times I \longrightarrow \text{Iso}(E' \times I, E \times I)$ entspricht.

Setze $F = \bar{H}|_{X \times \{1\}}$, dann erfüllen H und F die Bedingungen. $\square$

Lemma 3.4: Sei (X, A) ein K_0 -Raumpaar.

i) Seien (E_0, f, E_1) und (E_1, g, E_2) Tripel über (X, A) .

Dann sind die beiden Tripel

$$(E_0, g \circ f, E_2) \text{ und } (E_0 \oplus E_1, f \oplus g, E_1 \oplus E_2)$$

stabil isomorph.

ii) Seien (E_0, f, E_1) und (E_0, g, E_1) Tripel über (X, A) . Sei $h: A \times I \longrightarrow \text{Iso}(E_0|_A, E_1|_A)$ eine Homotopie zwischen f und g ,

so dass $h_t : A \rightarrow \text{Iso}(E_0|_A, E_1|_A)$ ein Schnitt ist für alle $t \in I$.
Dann sind die beiden Tripel stabil isomorph.

Beweis: zu i) Wir haben das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 E_1 \oplus E_0|_A & \xrightarrow[\begin{pmatrix} \text{id} & f \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}]{(1)} & E_1 \oplus E_0|_A & & \\
 \downarrow \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & g \circ f \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} & & \\
 E_1 \oplus E_2|_A & \xleftarrow[\text{(2)}]{\begin{pmatrix} 0 & -\text{id} \\ \text{id} & 0 \end{pmatrix}} & E_2 \oplus E_1|_A & \xleftarrow[\text{(3)}]{\begin{pmatrix} \text{id} & g \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}} & E_2 \oplus E_1|_A \\
 & & & & \xleftarrow[\text{(4)}]{\begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ -g^{-1} & \text{id} \end{pmatrix}} E_2 \oplus E_1|_A
 \end{array}$$

Zur Kommutativität:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\text{id} \\ \text{id} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{id} & g \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ -g^{-1} & \text{id} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{id} & f \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} 0 & -\text{id} \\ \text{id} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & g \\ -g^{-1} & \text{id} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g & g \circ f \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{-1} & -\text{id} \\ 0 & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g & g \circ f \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & g \circ f \end{pmatrix}$$

Wir können f, g, g^{-1} zu Morphismen über X fortsetzen. Die Fortsetzungen sind im allgemeinen keine Isomorphismen. Dennoch sind die Abbildungen (1)–(4) in obigem Diagramm Isomorphismen über X (das Inverse zu $\begin{pmatrix} \text{id} & f \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}$ ist zum Beispiel $\begin{pmatrix} \text{id} & -f \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}$). Hieraus folgt, dass die beiden Tripel aus i) stabil isomorph sind.

zu ii): Betrachte das Tripel $(E_0 \oplus E_1, f \oplus g^{-1}, E_1 \oplus E_0)$.

Nach i) ist es stabil isomorph zu $(E_0, g^{-1} \circ f, E_0)$. Nach Voraussetzung ist $g^{-1} \circ f$ homotop durch Isomorphismen zu id_{E_0} , also folgt aus Lemma 3.3, dass sich $g^{-1} \circ f$ zu einem Isomorphismus auf ganz X fortsetzen lässt. Aus der Bemerkung folgt

$$[E_0, g^{-1} \circ f, E_0]_{st} = [0, \text{id}, 0]_{st}$$

$$\text{Nach i): } [E_1 \oplus E_0, g^{-1} \oplus g, E_0 \oplus E_1]_{st} = [0, \text{id}, 0]_{st}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
 [E_0, f, E_1]_{st} &= [E_0 \oplus E_1 \oplus E_0, f \oplus g^{-1} \oplus g, E_1 \oplus E_0 \oplus E_1]_{st} \\
 &= [E_0 \oplus E_1, f \oplus g^{-1}, E_1 \oplus E_0]_{st} + [E_0, g, E_1]_{st} \\
 &= [E_0, g^{-1} \circ f, E_0]_{st} + [E_0, g, E_1]_{st} = [E_0, g, E_1]_{st}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Korollar 3.5: Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar, dann ist $K^{-n}(X, A)$ für $n \geq 0$ eine abelsche Gruppe.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $K^0(X, A)$ eine abelsche Gruppe ist.
Sei $[E_0, f, E_1]_{st} \in K^0(X, A)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & [E_0, f, E_1]_{st} + [E_1, f^{-1}, E_0]_{st} \\ &= [E_0 \oplus E_1, f \oplus f^{-1}, E_1 \oplus E_0]_{st} \stackrel{\text{nach Lemma 3.4 i)}}{=} [E_0, \underbrace{f^{-1} \circ f}_{= id}, E_0] \\ &= [0, id, 0]. \end{aligned}$$

□

Die Zuordnung $(X, A) \mapsto K^{-n}(X, A)$ ist ein kontravarianter Funktor:

Sei $g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ eine stetige Abb. von Ko-Raumparen, dann ist

$$g^* : K^{-n}(Y, B) \longrightarrow K^{-n}(X, A)$$

definiert durch $g^*[E_0, f, E_1]_{st} = [g^*E_0, g^*f, g^*E_1]_{st}$. Hierbei ist g^*f die von der universellen Eigenschaft des Pullbacks induzierte Abb.:

$$\begin{array}{ccccc} g^*E_0|_A & \xrightarrow{\quad} & E_0|_B & \xrightarrow{f} & E_1|_B \\ \downarrow & \searrow g^*f & \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{g|_A} & B & \xrightarrow{id} & B \\ & \searrow id & \downarrow & & \downarrow \\ & & A & \xrightarrow{g|_A} & B \end{array}$$

Lemma 3.6: Der Funktor $(X, A) \mapsto K^{-n}(X, A)$ ist homotopieinvariant.

Beweis: Seien $g_0, g_1 : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ stetige Abbildungen und sei $h : (X \times I, A \times I) \longrightarrow (Y, B)$ eine Homotopie zwischen g_0 und g_1 .

Sei (E_0, f, E_1) ein Tripel über (Y, B) .

Nach Thm. 2.10 a) existieren Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} h^*E_0 & \xrightarrow{\psi^{(0)}} & g_1^*E_0 \times I \\ h^*E_1 & \xrightarrow{\psi^{(1)}} & g_1^*E_1 \times I \end{array} \quad \text{die über } X \times \{1\} \text{ Identitäten sind.}$$

$$\text{Betrachte } (\psi^{(1)}|_{A \times I}) \circ h^*f \circ (\psi^{(0)}|_{A \times I})^{-1} : g_1^*E_0 \times I \xrightarrow{\cong} g_1^*E_1 \times I.$$

Dies entspricht einer Homotopie: $\tilde{h} : A \times I \longrightarrow \text{Iso}(g_1^*E_0 \times I|_{A \times I}, g_1^*E_1 \times I|_{A \times I})$.

Sei $\tilde{f} = (\psi_0^{(1)}|_A) \circ h_0^* f \circ (\psi_0^{(0)}|_A)^{-1}$. Nun kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} g_0^* E_0|_A & \xrightarrow{g_0^* f = h_0^* f} & g_0^* E_1|_A \\ \psi_0^{(0)}|_A \downarrow & & \downarrow \psi_0^{(1)}|_A \\ g_1^* E_0|_A & \xrightarrow{\tilde{f}} & g_1^* E_1|_A \end{array}$$

Es ist $\tilde{h}_0 = \tilde{f}$ und $\tilde{h}_1 = g_1^* f$. Nach Lemma 3.4 ii) haben wir

$$[g_0^* E_0, g_0^* f, g_0^* E_1]_{st} = [g_1^* E_0, \tilde{f}, g_1^* E_1]_{st} = [g_1^* E_0, g_1^* f, g_1^* E_1]_{st} \quad \square$$

§ 3.1. Ausschneidung

Zur Erinnerung: Das Ausschneidungsaxiom sagt:

Sei (X, A) ein K_0 -Raumpaar und $U \subset A$, so dass $\bar{U} \subset \mathring{A}$, dann ist die induzierte Abbildung $K^{-n}(X, A) \longrightarrow K^{-n}(X \setminus U, A \setminus U)$ ein Isomorphismus.

Wir werden eine etwas stärkere Aussage zeigen. Hierzu benötigen wir zwei Konstruktionen:

Lemma 3.7: Sei folgendes Diagramm ein Pushout-Diagramm von kompakten Hausdorffräumen:

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ X_2 & \xrightarrow{j_2} & X \end{array}$$

Seien $p_i: E_i \longrightarrow X_i$ für $i \in \{1, 2\}$

K -Vektorbündel und sei

$f: i_1^* E_1 \longrightarrow i_2^* E_2$ ein Isomorphismus

von K -Vektorbündeln über X_0 ,

dann ist $E := E_1 \amalg E_2 / \sim$ mit der Äquivalenzrelation, die erzeugt wird von $v_1 \sim f(v_1)$ für alle $v_1 \in E_1$ mit $p_1(v_1) \in X_0$ ein K -Vektorbündel über X .

Beweis: Übung.

Lemma 3.8: Sei (X, A) ein K_0 -Raumpaar. Sei $p: E \longrightarrow A$ ein K -Vektorbündel und $\iota: A \hookrightarrow X$ die Inklusion. Dann existieren K -Vektorbündel $q: F \longrightarrow X$ und $q': F' \longrightarrow A$, so dass $\iota^* F \cong E \oplus F'$.

Beweis-idee: Finde $q': F' \longrightarrow A$, so dass $E \oplus F'$ trivialisierbar ist.
siehe Übung!

Theorem 3.9: Sei das folgende Diagramm ein Pushout-Diagramm von kompakten Hausdorffräumen:

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ X_2 & \xrightarrow{j_2} & X \end{array}$$

a) Ist i_1 eine Kofaserung, dann auch j_2

b) Der induzierte Homomorphismus $j_1^* : K^{-n}(X_1, X_2) \longrightarrow K^{-n}(X_1, X_0)$ für $n \geq 0$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: zu a) Sei $f: X \times \{0\} \cup X_2 \times I \longrightarrow Z$ eine stetige Abbildung. Da $X_0 \hookrightarrow X_1$ eine Kofaserung ist, existiert eine stetige Abb. $h_1: X_1 \times I \longrightarrow Z$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X_1 \times \{0\} \cup X_0 \times I & \xrightarrow{j_1 \cup i_2 \times \text{id}} & X \times \{0\} \cup X_2 \times I & \xrightarrow{f} & Z \\ \downarrow & & & \nearrow h_1 & \\ X_1 \times I & & & & \end{array}$$

kommutiert. Jetzt betrachte das Pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_0 \times I & \xrightarrow{i_1 \times \text{id}} & X_1 \times I \\ i_2 \times \text{id} \downarrow & & \downarrow j_1 \times \text{id} \\ X_2 \times I & \xrightarrow{j_2 \times \text{id}} & X \times I \end{array}$$

h_1

$f|_{X_2 \times I} \searrow \quad \quad \quad \nearrow h$

Z

Aufgrund der universellen Eigenschaft existiert die stetige Abb. h , so dass das Diagramm kommutiert.

Nach Definition von h_1 und h kommutiert dann auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup X_2 \times I & \xrightarrow{f} & Z \\ \downarrow & & \nearrow h \\ X \times I & & \end{array}$$

zu b) Wir zeigen die Behauptung zunächst für $n=0$:

(Injektivität) von $K^0(X_1, X_2) \xrightarrow{j_1^*} K^0(X_1, X_0)$: Sei (E_0, f, E_1) ein Tripel über (X_1, X_2) mit $j_1^* [E_0, f, E_1]_{\text{st}} = 0$. Also existiert ein Vektorbündel $q: F \longrightarrow X_1$, so dass sich der Isomorphismus

$$(j_1^* E_0 \oplus F)|_{X_0} \xrightarrow{j_1^* f \oplus \text{id}} (j_1^* E_1 \oplus F)|_{X_0}$$

zu einem Isomorphismus über X_1 fortsetzen lässt. Nach Lemma 3.8 existieren Vektorbündel $q': F' \longrightarrow X$ und $\tilde{F} \longrightarrow X_1$, so dass $j_1^* F' \cong F \oplus \tilde{F}$

Es gilt: $[j_1^* E_0, j_1^* f, j_1^* E_1]_{st} = [j_1^* (E_0 \oplus F'), \underbrace{j_1^* (f \oplus \text{id}_{F'})}_{\text{l\"ast sich zu Iso \u00fcber } X_1 \text{ ausdehnen}}, j_1^* (E_1 \oplus F')]_{st}$

Wir k\u00f6nnen daher o.B.d.A. annehmen, dass sich $j_1^* f$ zu einem Iso \u00fcber X_1 fortsetzen l\u00e4sst. Das Vektorb\u00fcndel E_0 ist isomorph zur Verklebung von $j_1^* E_0 \rightarrow X_1$ und $j_2^* E_0 \rightarrow X_2$ mittels der Identit\u00e4t $i_2^* j_2^* E_0 \xrightarrow{\cong} i_1^* j_1^* E_0$ wie in Lemma 3.7 beschrieben. \u00c4hnliches gilt f\u00fcr $E_1 \rightarrow X$. Wir haben Isomorphismen $j_1^* E_0 \xrightarrow{j_1^* f} j_1^* E_1$ und $j_2^* E_0 = E_0|_{X_2} \xrightarrow{f} E_1|_{X_2} = j_2^* E_1$, die kompatibel mit der \u00c4quivalenzrelation in der Verklebung sind.

Sie induzieren daher einen Isomorphismus $E_0 \xrightarrow{\cong} E_1$ \u00fcber X , der f fortsetzt.
 $\Rightarrow [E_0, f, E_1]_{st} = 0$.

Surjektivit\u00e4t von $K^0(X_1, X_2) \xrightarrow{j_1^*} K^0(X_1, X_0)$: Sei (E_0, f, E_1) ein Tripel \u00fcber (X_1, X_0) . Nach Lemma 3.8 existieren Vektorb\u00fcndel $q: F \rightarrow X_1$ und $p_1: E_1' \rightarrow X$ mit einem Isomorphismus $\psi: E_1 \oplus F \xrightarrow{\cong} j_1^* E_1'$. Sei $\alpha: (E_0 \oplus F)|_{X_0} \rightarrow j_1^* E_1'|_{X_0}$ gegeben durch:

$$(E_0 \oplus F)|_{X_0} \xrightarrow[\cong]{f \oplus \text{id}} (E_1 \oplus F)|_{X_0} \xrightarrow[\cong]{\psi} j_1^* E_1'|_{X_0}$$

Definiere nun $p_0': E_0' \rightarrow X$ durch Verkleben von $E_0 \oplus F \rightarrow X_1$ und $E_1'|_{X_2} \rightarrow X_2$ entlang von α wie in Lemma 3.7. Sei $f': E_0'|_{X_2} \rightarrow E_1'|_{X_2}$ gegeben durch die Identit\u00e4t. Jetzt gilt:

$$\begin{aligned} j_1^* [E_0', f', E_1']_{st} &= [E_0 \oplus F, \psi \circ (f \oplus \text{id}), j_1^* E_1']_{st} \\ &= [E_0 \oplus F, f \oplus \text{id}, E_1 \oplus F]_{st} \\ &= [E_0, f, E_1]_{st} + \underbrace{[F, \text{id}, F]_{st}}_{=0} \end{aligned}$$

F\u00fcr den Fall $n > 0$ l\u00e4sst sich der Beweis auf den Fall $n=0$ zur\u00fcckf\u00fchren, denn $(X_1, X_0) \times (I^n, \partial I^n) = (X_1 \times I^n, X_1 \times \partial I^n \cup X_0 \times I^n)$,
 $X_0 \times I^n \cup X_1 \times \partial I^n \hookrightarrow X_1 \times I^n$ ist eine Kofaserung
 und

$$\begin{array}{ccc} X_0 \times I^n \cup X_1 \times \partial I^n & \hookrightarrow & X_1 \times I^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 \times I^n \cup X \times \partial I^n & \hookrightarrow & X \times I^n \end{array} \quad \text{ist ein Pushout-Diagramm.}$$

□

Korollar 3.10: Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar und $U \subset A$, so dass $\bar{U} \subset \mathring{A}$, dann ist $K^{-n}(X, A) \rightarrow K^{-n}(X \setminus U, A \setminus U)$ ein Isomorphismus.

Beweis: Setze $X_0 = A \setminus U$, $X_1 = X \setminus U$, $X_2 = A$ in Thm. 3.9. Dann ist der Pushout gleich X .

□

Exakte Tripelsequenz in K-Theorie

Def. 3.11. : Ein Tripel (X, B, A) von kompakten Hausdorffräumen, so dass $A \subset B$ und $B \subset X$ Kofaserungen sind, heißt Ko-Raumtripel.

Ziel: Wollen exakte Tripelsequenz in K-Theorie konstruieren

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & K^{-n}(X, B) & \xrightarrow{i^*} & K^{-n}(X, A) & \xrightarrow{j^*} & K^{-n}(B, A) \xrightarrow{\delta^{-n}} K^{-n+1}(X, B) \rightarrow \dots \\ \dots & \rightarrow & K^0(X, B) & \rightarrow & K^0(X, A) & \rightarrow & K^0(B, A) \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{Brauchen Randabbildung } \partial \end{array} \quad (*)$$

Die Randabbildung

Brauchen nat. Homomorphismus abelscher Gruppen $\delta^{-n}: K^{-n}(B, A) \longrightarrow K^{-n+1}(X, B)$.

Wir definieren zunächst $\delta^{-1}: K^{-1}(B, A) \longrightarrow K^0(X, B)$.

$$\begin{array}{ccc}
 K^{-1}(B, A) = K^0(B \times I, B \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}) & \xrightarrow{\delta^{-1}} & K^0(X, B) \\
 \textcircled{1} \uparrow & & \textcircled{2} \downarrow \text{pr}_X^* \\
 K^0(X \times \{0\} \cup B \times I, X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}) & \xrightarrow{\quad} & K^0(X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\}) \\
 & \uparrow \text{induziert von Inklusion} &
 \end{array}$$

$\text{pr}_X : X \times \{0\} \cup B \times I \longrightarrow X$ ist die Einschränkung von $\text{pr}_X : X \times I \longrightarrow X$.

Wollen sehen, dass ① und ② Isomorphismen sind.

① ist Ausschneidung mit $U = (X \setminus B) \times \{0\} \Rightarrow$ Isomorphismus

② Behauptung: $pr_X: (X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\}) \xrightarrow{pr_X} (X, B)$ ist Homotopieäquivalenz von Raumpaares.

Beweis: Betrachte $X \times \{0\} \cup B \times I \xrightarrow{id} X \times \{0\} \cup B \times I$

$\downarrow$

$X \times I \dashrightarrow$ $h \leftarrow$ existiert, da $B \hookrightarrow X$ eine Kotisierung ist.

Setze $h_i = h|_{X \times \{i\}}$. Dann ist $h_0: X = X \times \{0\} \longrightarrow X \times \{0\} \cup B \times I$ die Inklusion und $h_1: X \longrightarrow X \times \{0\} \cup B \times I$ bildet $B \subset X$ nach $B \times \{1\}$ ab. Außerdem ist $h_1(A \times I) = A \times I$.

Somit liefert h_1 eine stetige Abbildung $h_1: (X, B) \rightarrow (X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\})$.
Dann gilt: $pr_X \circ h_1: (X, B) \rightarrow (X, B)$ ist homotop durch Abbildungen von
Raumpaaren zu $pr_X \circ h_0 = id$.

Sei $H: (X \times \{0\} \cup B \times I) \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup B \times I$ gegeben durch

$$\begin{aligned} ((x, 0), s) &\longmapsto h(x, s) && \text{auf } X \times \{0\} \times I \\ ((b, t), s) &\longmapsto h(b, (1-s)t + s) && \text{auf } B \times I \times I \end{aligned}$$

Dies ist stetig und es gilt $H((A \times I \cup B \times \{1\}) \times I) \subset A \times I \cup B \times \{1\}$.

Außerdem ist $H((x, t), 0) = h(x, t) = \text{id}_{X \times \{0\} \cup B \times I}$

und $H((x,t), 1) = h(x, 1) = h_2(\text{pr}_x(x,t))$

Also ist H eine Homotopie zwischen h_{opr_Y} und id als Abb. von Raumparen.

Wegen Homotopieinvarianz von K^0 ist damit ② ein Isomorphismus.

δ^{-n} für $n > 1$ ist folgendermaßen definiert:

Betrachte das Tripel: $(X \times I^{n-1}, B \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}, A \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1})$ (**)

Ausschneidung liefert einen Isomorphismus

$$K^{-1}(B \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}, A \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}) \xrightarrow{\cong} K^{-1}(\underbrace{B \times I^{n-1}, A \times I^{n-1} \cup B \times \partial I^{n-1}}_{=(B,A) \times (I^{n-1}, \partial I^{n-1})}) = K^{-n}(B, A)$$

Jetzt definiere:

$$\begin{array}{ccc} K^{-n}(B, A) & \xrightarrow{\delta^{-n}} & K^{-n+1}(X, B) \\ \cong \uparrow \leftarrow \text{Isomorphismus von oben} & & \parallel \\ K^{-1}(B \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}, A \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}) & \xrightarrow{\delta^{-1}} & K^0(X \times I^{n-1}, B \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}) \\ & \uparrow \text{für das Tripel (**) oben} & \end{array}$$

Theorem 3.12: Sei (X, B, A) ein Ko-Raumtripel, dann ist die Folge
 $\dots \rightarrow K^{-n}(X, B) \xrightarrow{i^*} K^{-n}(X, A) \xrightarrow{j^*} K^{-n}(B, A) \xrightarrow{\delta^{-n}} K^{-n+1}(X, B) \rightarrow \dots$
 exakt, wobei $i: (X, A) \hookrightarrow (X, B)$ und $j: (B, A) \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen sind.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Exaktheit bei $K^0(X, A)$ und folgern die Exaktheit an allen anderen Stellen hieraus.

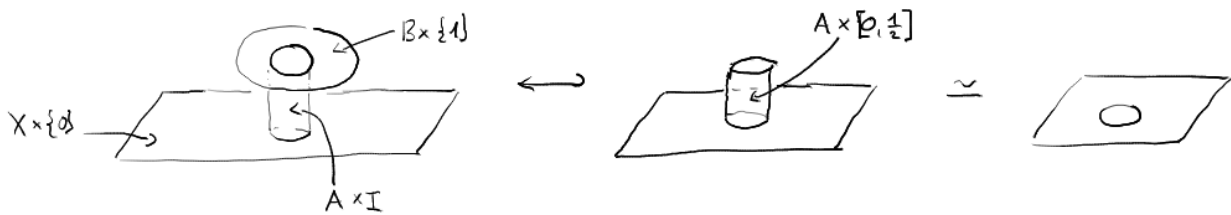
-) zu zeigen: $\text{Kern}(j^*) = \text{Bild}(i^*)$. Sei $[E_0, f, E_1]_{st} \in K^0(X, B)$, dann ist $j^* \circ i^* [E_0, f, E_1]_{st} = [E_0|_B, f|_A, E_1|_B]_{st}$. $f|_A$ setzt sich zu einem Isomorphismus f über B fort $\Rightarrow j^* \circ i^* = 0$. Dies zeigt $\text{Bild}(i^*) \subset \text{Kern}(j^*)$.
-) Sei jetzt $[E_0, f, E_1]_{st} \in \text{Kern}(j^*)$. Dann existiert ein Vektorbündel $F \rightarrow B$, so dass sich $f \oplus \text{id}_F: (j^* E_0 \oplus F)|_A \rightarrow (j^* E_1 \oplus F)|_A$ zu einem Iso über B fortsetzen lässt. Sei g dieser Isomorphismus. Nach Lemma 3.8 können wir annehmen, dass $F = j^* F'$ für ein Vektorbündel $F' \rightarrow X$. Dann gilt aber
 $[E_0, f, E_1]_{st} = [E_0 \oplus F', f \oplus \text{id}_{F'}, E_1 \oplus F']_{st} = i^* [E_0 \oplus F', g, E_1 \oplus F']$
 $\Rightarrow \text{Kern}(j^*) \subset \text{Bild}(i^*)$.

Für die Exaktheit bei $K^0(X, B)$ betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^0(X \times \{0\} \cup B \times I, X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}) & \xrightarrow[\cong]{i_1^*} & K^{-1}(B, A) \\ i_2^* \downarrow & \text{①} & \downarrow \delta^{-1} \\ K^0(X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\}) & \xleftarrow[\cong]{pr_X^*} & K^0(X, B) \\ i_3^* \downarrow & \text{②} & \downarrow i^* \\ K^0(X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}, A \times I \cup B \times \{1\}) & \xrightarrow[\cong]{i_4^*} & K^0(X, A) \end{array}$$

- ① Kommutiert nach Definition von δ^{-1}
- ② Kommutiert, da $\text{pr}_X^* \circ i_3^* \circ i_4^* = i_1^*$

i_4^* ist ein Isomorphismus wegen Ausschneidung und Homotopieinvarianz



i_1^* und pr_X^* sind Isomorphismen wie oben erklärt.

Die Exaktheit der rechten Seite bei $K^0(X, B)$ folgt aus der Exaktheit der linken Seite an der entsprechenden Stelle. Aber hier steht der Ausschnitt aus der exakten Folge des Tripels

$$(X \times \{0\} \cup B \times I, X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}, A \times I \cup B \times \{1\})$$

an der Stelle, an der keine Randabbildung auftritt. Somit folgt die Exaktheit hier aus dem, was wir bereits gezeigt haben.

Exaktheit bei $K^{-1}(B, A)$ lässt sich ebenfalls durch Verschieben der exakten Sequenz zeigen:

$$\begin{array}{ccc}
 K^{-1}(X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}, A \times I \cup B \times \{1\}) & \xrightarrow{\cong} & K^{-1}(X, A) \\
 \delta^{-1} \downarrow & \textcircled{3} & \downarrow j^* \\
 K^0(X \times \{0\} \cup B \times I, X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}) & \xrightarrow[\cong]{i_1^*} & K^{-1}(B, A) \\
 i_1^* \downarrow & \textcircled{4} & \downarrow \delta^{-1} \\
 K^0(X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\}) & \xleftarrow[\cong]{\text{pr}_X^*} & K^0(X, B)
 \end{array}$$

- ④ Kommutiert aufgrund der Definition von δ^{-1}

Dass das Diagramm bei ③ kommutiert, ist eine (mühsame!) Übungsaufgabe.

Die Exaktheit für $n \geq 1$ folgt aus den folgenden Überlegungen:

Betrachte das K^0 -Raumtripel $(X \times I^n, B \times I^n \cup X \times \partial I^n, A \times I^n \cup X \times \partial I^n)$ und das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 K^0((X, A) \times (I, \partial I)^{n+1}) & \xlongequal{\quad} & K^{-(n+1)}(X, A) \\
 j^* \downarrow & & \downarrow j^* \\
 K^0((B \times I^n \cup X \times \partial I^n, A \times I^n \cup X \times \partial I^n) \times (I, \partial I)) & \xrightarrow[\cong]{\quad} & K^{-(n+1)}(B, A) \\
 \delta^{-1} \downarrow & \textcircled{5} & \downarrow \delta^{-(n+1)} \\
 K^0((X, B) \times (I, \partial I)^n) & \xlongequal{\quad} & K^{-n}(X, B) \\
 i^* \downarrow & & \downarrow i^* \\
 K^0((X, A) \times (I, \partial I)^n) & \xlongequal{\quad} & K^{-n}(X, A) \\
 j^* \downarrow & & \downarrow j^* \\
 K^0(B \times I^n \cup X \times \partial I^n, A \times I^n \cup X \times \partial I^n) & \xrightarrow[\cong]{\quad} & K^{-n}(B, A)
 \end{array}$$

Das Quadrat ⑤ kommutiert nach Definition von $\delta^{-(n+1)}$.

Die linke Spalte des Diagramms ist exakt, also auch die rechte Spalte.

□