§3.1. Produkte in K-Theorie

Def. 3.1.1. •) Ein *Kettenkomplex von Vektorbündeln* über einem K_0-Raumpaar (X, A) ist gegeben durch eine Familie $(C_n, c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wobei alle C_i endlichdimensionale Vektorbündel sind und $c_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ Morphismen von Vektorbündeln mit den folgenden Eigenschaften:

a) $\exists\, N \geq 0$ mit $C_n = 0$ für $n > N$

b) $c_{n-1} \circ c_n = 0$

c) für alle $x \in A$ ist die Folge von Vektorräumen und linearen Abb.
$$0 \to C_N|_x \xrightarrow{c_N|_x} C_{N-1}|_x \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1|_x \xrightarrow{c_1|_x} C_0|_x \longrightarrow 0$$
exakt.

•) Eine *Kettenabbildung* zwischen $(C_\cdot, c_\cdot)$ und $(D_\cdot, d_\cdot)$ über (X, A) ist eine Folge von Morphismen von Vektorbündeln $f_k : C_k \longrightarrow D_k$, so dass

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & C_k \arrow[r, "c_k"] \arrow[d, "f_k"'] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{k-1}"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & D_k \arrow[r, "d_k"] & D_{k-1} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$
kommutiert.

•) Zwei Kettenkomplexe $(C^i_\cdot, c^i_\cdot)$ für $i \in \{0,1\}$ heißen *homotop*, falls es einen Kettenkomplex $(C_\cdot, c_\cdot)$ über $(X \times I, A \times I)$ gibt, so dass

$$(C_\cdot, c_\cdot)|_{X\times\{i\}} \underset{\uparrow}{\cong} (C^i_\cdot, c^i_\cdot).$$
isomorph als Kettenkomplex

Wir schreiben hierfür auch $(C^0_\cdot, c^0_\cdot) \simeq (C^1_\cdot, c^1_\cdot)$.

•) Wir definieren $K(X,A)^c$ als den Quotienten der freien abelschen Gruppe erzeugt von den Isomorphieklassen von Kettenkomplexen von $\mathbb{C}$-Vektorbündeln über (X, A) bezüglich der folgenden Relationen (wir lassen die Differentiale in der Notation weg):

(a) $C_\cdot \simeq D_\cdot \Rightarrow [C_\cdot] = [D_\cdot]$

(b) $0 \to C_\cdot \longrightarrow D_\cdot \longrightarrow E_\cdot \longrightarrow 0$ kurze exakte Folge von Kettenkomplexen (d.h. faserweise exakt)
$\Rightarrow [C_\cdot] - [D_\cdot] + [E_\cdot] = 0$

(c) $[\dots \to 0 \to E \xrightarrow{id} E \to 0 \to \dots] = 0$.

Bemerkung: Aus Relation (b) folgt $[C_\cdot \oplus D_\cdot, c_\cdot \oplus d_\cdot] = [C_\cdot, c_\cdot] + [D_\cdot, d_\cdot]$.

Wir haben einen Gruppenhomomorphismus
$$a : K^0(X, A) \longrightarrow K(X,A)^c \; ; \; [E_1, f, E_0] \longmapsto [\to 0 \to E_1 \xrightarrow{\tilde f} E_0 \to 0]$$
wobei $\tilde f$ eine beliebige Fortsetzung von f zu einem Morphismus über X ist.

Tatsächlich ist a unabhängig von der Wahl von $\tilde{f}$, da zwei verschiedene Fortsetzungen $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ mittels $h_t = t\cdot\tilde{f}_1 + (1-t)\cdot\tilde{f}_2$ homotop sind. Es gilt dann $h_t|_A = f$ und

$$\dots \to 0 \to E_1 \times I \xrightarrow{(v,t)\mapsto(h_t(v),t)} E_0 \times I \longrightarrow 0$$

ist ein Kettenkomplex über $(X\times I, A\times I)$ der eine Homotopie zwischen $(\dots \to 0 \to E_1 \xrightarrow[\tilde{f}_1]{} E_0 \to 0)$ und $(\dots \to 0 \to E_1 \xrightarrow[\tilde{f}_2]{} E_0 \to 0)$ liefert.

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass a ein Isomorphismus ist. Die Umkehrabbildung „wickelt" einen Kettenkomplex zu einem Tripel auf. Für ihre Konstruktion brauchen wir den folgenden Begriff:

<u>Def. 3.1.2.</u>: Sei $(C_\cdot, c_\cdot)$ ein Kettenkomplex über (X,A). Eine <u>Kettenkontraktion von $C_\cdot$ über A</u> ist eine Familie von Bündelabbildungen $\gamma_n : C_n|_A \longrightarrow C_{n+1}|_A$, so dass $\gamma_{n-1}\circ c_n|_A + c_{n+1}|_A \circ \gamma_n = id_{C_n|_A}$ gilt.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C_{n+1}|_A \arrow[r, "c_{n+1}|_A"] & C_n|_A \arrow[r, "c_n|_A"] \arrow[dl, "\gamma_n"'] \arrow[d, dashed, "id"] & C_{n-1}|_A \arrow[r] \arrow[dl, "\gamma_{n-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C_{n+1}|_A \arrow[r, "c_{n+1}|_A"'] & C_n|_A \arrow[r, "c_n|_A"'] & C_{n-1}|_A \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

<u>Lemma 3.1.3:</u> Sei $(C_\cdot, c_\cdot)$ ein Kettenkomplex über dem Ko-Raumpaar (X,A). Dann existiert eine Kettenkontraktion über A.

<u>Beweis</u>: Übung.

<u>Lemma 3.1.4.</u>: Die Abbildung $b: K(X,A)^c \longrightarrow K^0(X,A)$ gegeben durch $b([C_\cdot, c_\cdot]) = [C_{odd}, (c_\cdot|_A + \gamma_\cdot), C_{even}]$ mit $C_{odd} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} C_{2k+1}$ und $C_{even} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} C_{2k}$ und $\gamma_\cdot$ einer Kettenkontraktion über A ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

<u>Beweis</u>: Wir werden gleichzeitig beweisen, dass b unabhängig von der Wahl von γ ist und dass $c|_A + \gamma$ ein Isomorphismus über A ist. Hierzu sei $\gamma'_\cdot : C_\cdot|_A \longrightarrow C_{\cdot+1}|_A$ eine weitere Kettenkontraktion über A. Sei $\delta_n = (\gamma'_{n+1} - \gamma_{n+1})\circ\gamma_n : C_n|_A \longrightarrow C_{n+2}|_A$.
Betrachte

$$f: C_{even}|_A \xrightarrow{id+\delta_\cdot} C_{even}|_A \quad \text{und}$$

$$g: C_{odd}|_A \xrightarrow{c_\cdot|_A + \gamma_\cdot} C_{even}|_A \xrightarrow{f} C_{even}|_A \xrightarrow{c_\cdot|_A + \gamma'_\cdot} C_{odd}|_A$$

Wir betrachten $g|_{C_{2n+1}}$:

$$g: \; C_{2n+1} \overset{c|_A+\gamma_\cdot}{\rightsquigarrow} \begin{matrix} C_{2n+2} \\ C_{2n} \end{matrix} \overset{f}{\rightsquigarrow} \begin{matrix} C_{2n+4} \\ C_{2n+2} \\ C_{2n} \end{matrix} \overset{c_\cdot|_A+\gamma'_\cdot}{\rightsquigarrow} \begin{matrix} C_{2n+5} \\ C_{2n+3} \\ C_{2n+1} \\ C_{2n-1} \end{matrix}$$

Der Teil von g, der $C_{2n+1} \longrightarrow C_{2n-1}$ abbildet, ist gegeben durch $c_{2n+1} \circ c_{2n} = 0$.
Der Teil von g, der $C_{2n+1} \longrightarrow C_{2n+1}$ abbildet, ist

$$\gamma'_{2n} \circ c_{2n+1} + c_{2n+2} \circ \gamma_{2n+1} + c_{2n+2} \circ (\gamma'_{2n+1} - \gamma_{2n+1}) \circ \gamma_{2n} \circ c_{2n+1}$$
$$= \cancel{\gamma'_{2n} \circ c_{2n+1}} + c_{2n+2} \circ \gamma_{2n+1} + (\gamma_{2n} - \cancel{\gamma'_{2n}}) \circ c_{2n+1}$$
$$= c_{2n+2} \circ \gamma_{2n+1} + \gamma_{2n} \circ c_{2n+1} = id$$

wobei wir die Eigenschaften der Kettenkontraktion benutzt haben.
$\Rightarrow$ g ist "Dreiecksmatrix mit Identitäten auf der Diagonalen"
$\Rightarrow$ g ist invertierbar
Genauso folgt: f ist invertierbar.

Also ist $c.|_A + \gamma.$ injektiv, $c.|_A + \gamma'.$ surjektiv. Durch Vertauschen von $\gamma.$ und $\gamma'.$ sehen wir, dass beide Isomorphismen sind.

Betrachte jetzt $h_t = (id + t\cdot\delta.) \circ (c.|_A + \gamma.)$. Dies ist eine Homotopie durch Isomorphismen. Wir haben

$$[C_{odd}, (c.|_A + \gamma.), C_{even}]_{st} = [C_{odd}, f \circ (c.|_A + \gamma.), C_{even}]_{st} \qquad (*)$$

wegen der Homotopieinvarianz von K-Theorie.

Auch der Isomorphismus g ist von der Form $g = \overset{\text{Diagonalanteil}}{id} + \underset{\text{Rest}}{h}$. Mit dem gleichen Argument wie oben erhalten wir

$$[C_{odd}, (c.|_A + \gamma'.)^{-1}, C_{even}]_{st} = [C_{odd}, \underbrace{(c.|_A + \gamma'.)^{-1} \circ g}_{= f \circ (c.|_A + \gamma.)}, C_{even}]_{st} \qquad (**)$$

also folgt insbesondere für $\gamma. = \gamma'.$ aus $(*)$ u. $(**)$:

$$[C_{odd}, (c.|_A + \gamma'.)^{-1}, C_{even}]_{st} = [C_{odd}, (c.|_A + \gamma'.), C_{even}]_{st} \qquad (***)$$

Somit gilt:

$$[C_{odd}, (c.|_A + \gamma.), C_{even}]_{st} \overset{(*)\text{ u. }(**)}{=} [C_{odd}, (c.|_A + \gamma'.)^{-1}, C_{even}]_{st} \overset{(***)}{=} [C_{odd}, c.|_A + \gamma'., C_{even}]_{st}$$

Es bleibt zu zeigen, dass b mit den Relationen in $K(X,A)^c$ kompatibel ist.

- Falls $C. \simeq D.$ $\Rightarrow$ $b([C.]) = b([D.])$ aufgrund der Homotopieinvarianz.

- $b([\dots \to 0 \to E \xrightarrow{id} E \to 0 \to \dots]) = [E, id, E]_{st} = 0$.

- Sei $0 \to C. \xrightarrow{i.} D. \xrightarrow{p.} E. \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen.
<u>Übungsaufgabe</u>: Jede kurze exakte Folge von Vektorbündeln spaltet.

Daher gibt es Morphismen $t_n : E_n \longrightarrow D_n$ mit $p_n \circ t_n = id_{E_n}$. Das Problem ist, dass $t.$ keine Kettenabbildung sein muss! Wähle eine Kettenkontraktion $\varepsilon.$ für $E.$ über A. Setze

$$s_n = \overset{\text{Differential von } D.}{d_{n+1}}|_A \circ t_{n+1}|_A \circ \varepsilon_n + t_n|_A \circ \varepsilon_{n-1} \circ \overset{\text{Differential von } E.}{e_n}|_A$$

Dies ist ein Spalt von p_n über A. $i_n + s_n : C_n|_A \oplus E_n|_A \longrightarrow D_n|_A$ ist homotop durch Isomorphismen zu $i_n + t_n$ via $h_r = r \cdot (d_{n+1}|_A \circ t_{n+1}|_A - t_n|_A \circ e_{n+1}|_A) \circ \varepsilon_n + t_n|_A + i_n|_A$.

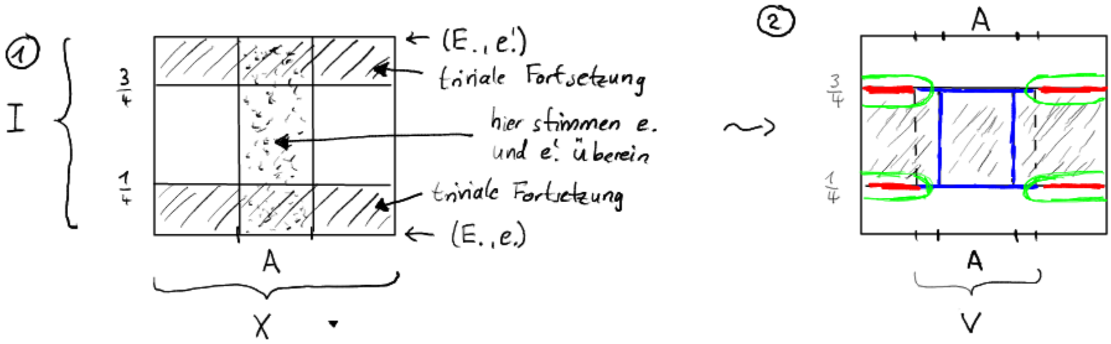
Da t_n auf ganz X definiert ist, lässt sich s_n zu einem Isomorphismus $\varphi_n : C_n \oplus E_n \longrightarrow D_n$ über X fortsetzen. Setze $\delta_n = (i_n + s_n) \circ (\gamma_n \oplus \varepsilon_n) \circ (i_n + s_n)^{-1}$. Dies ist eine Kettenkontraktion von $D.$ über A. Somit folgt

$$[C_{odd} \oplus E_{odd},\ \underbrace{(c.|_A + \gamma.) \oplus (e.|_A + \varepsilon.)}_{\begin{pmatrix} c.|_A & 0 \\ 0 & e.|_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma. & 0 \\ 0 & \varepsilon. \end{pmatrix}},\ C_{even} \oplus E_{even}]_{st} = [D_{odd},\ d.|_A + \delta.,\ D_{even}]_{st}.$$

$\square$

Lemma 3.1.5.: Seien $(E., e.)$ und $(E., e.')$ Kettenkomplexe über (X, A) mit $e_i|_A = e_i'|_A$. Dann gilt $[E., e.] = [E., e.'] \in K(X,A)^c$.

Beweisskizze: Idee: Konstruiere Kettenkomplex über $X \times I$, der eine Homotopie zwischen $(E., e.)$ und $(E., e.')$ liefert.



Finde V, so dass $(E., e.)|_V$ und $(E., e.')|_V$ beide azyklisch. Benutze ein weiteres Fortsetzungs-Lemma, um den Kettenkomplex von ▯ auf ▯ fortzusetzen. Differentiale müssen bei — nicht passen. Wähle Funktion, die auf den grün markierten Bereichen verschwindet und auf $A \times I \cup X \times \partial I$ gleich Eins ist. Multipliziere die Differentiale damit. $\square$

Lemma 3.1.6.: a und b sind invers zueinander.

Beweis: Es gilt $b \circ a = id_{K^0(X,A)}$. Folglich ist a injektiv und es genügt zu zeigen, dass a auch surjektiv ist. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass jeder Kettenkomplex über (X,A) der Länge $\ell \geq 2$ äquivalent zu einem Kettenkomplex der Länge $\ell - 1$ ist.

Betrachte also den folgenden Kettenkomplex über (X,A):

$$[0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{c_n} C_{n-1} \xrightarrow{c_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0]$$
$$= [0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{c_n \oplus 0} C_{n-1} \oplus C_n \xrightarrow[c_{n-1} \oplus id]{} C_{n-2} \oplus C_n \longrightarrow C_{n-3} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0] \quad (*)$$

Hier haben wir $0 = [0 \to 0 \to C_n \xrightarrow{id} C_n \to 0 \to \dots \to 0]$ dazugezählt. Der Monomorphismus $(c_n \oplus 0)|_A$ ist homotop durch Monomorphismen zu $(0 \oplus id)|_A$, aber $(0 \oplus id)|_A$ lässt sich zu einem Monomorphismus über ganz X ausdehnen. Eine Variante von Lemma 3.3 zeigt, dass sich dann auch $(c_n \oplus 0)|_A$ zu einem Monomorphismus $\tau : C_n \longrightarrow C_{n-1} \oplus C_n$ über X fortsetzen lässt.

Da jede kurze exakte Folge von Vektorbündeln spaltet, existiert ein Vektorbündel Q über X, so dass:

$$C_{n-1} \oplus C_n \cong \tau(C_n) \oplus Q .$$

Sei $c_{n-1}' = (c_{n-1} \oplus id)|_Q : Q \longrightarrow C_{n-2} \oplus C_n$. Betrachte den Kettenkomplex

$$[0 \to C_n \xrightarrow{\tau} \tau(C_n) \oplus Q \xrightarrow{c_{n-1}' \circ pr_Q} C_{n-2} \oplus C_n \longrightarrow \dots \to C_0 \to 0]$$

Dieser stimmt über A mit $(*)$ überein. Er liefert daher nach Lemma 3.1.5 dieselbe Klasse. Aber:

$$\begin{aligned}
&[0 \to C_n \xrightarrow{\tau} \tau(C_n) \oplus Q \xrightarrow{c_{n-1}' \circ pr_Q} C_{n-2} \oplus C_n \longrightarrow \dots \longrightarrow C_0 \to 0] \\
= &\underbrace{[0 \to C_n \longrightarrow \tau(C_n) \to 0 \to \dots \to 0]}_{= [0 \to C_n \xrightarrow{id} C_n \longrightarrow 0] = 0} + \underbrace{[0 \to 0 \to Q \xrightarrow{c_{n-1}'} C_{n-2} \oplus C_n \to \dots \to C_0 \to 0]}_{\text{hat Länge } e-1.}
\end{aligned}$$

□

Tensorprodukte von Kettenkomplexen

Def. 3.1.7: Seien (X, A) und (X', A') Ko-Raumpaare und seien $E \longrightarrow X$, $E' \longrightarrow X'$ zwei Vektorbündel. Das äußere Tensorprodukt von E und E' ist definiert durch

$$E \boxtimes E' = pr_X^* E \otimes pr_{X'}^* E' .$$

Dies ist in kanonischer Weise ein Vektorbündel über $X \times X'$.
Hierbei sind $pr_X : X \times X' \longrightarrow X$ und $pr_{X'} : X \times X' \longrightarrow X'$ die Projektionen.

Sei $(C_\bullet, c_\bullet)$ ein Kettenkomplex von Vektorbündeln über (X, A),
sei $(C_\bullet', c_\bullet')$ ein weiterer solcher Kettenkomplex über (X', A').
Das (äußere) Tensorprodukt von $(C_\bullet, c_\bullet)$ und $(C_\bullet', c_\bullet')$ ist definiert durch

$$(C \boxtimes C')_n = \bigoplus_{i+j=n} C_i \boxtimes C_j \quad \text{mit dem Differential}$$

$$c_n'' = \sum_{i+j=n} c_i \boxtimes id + (-1)^i id \boxtimes c_j' .$$

Um zu sehen, dass dies ein Kettenkomplex über (X, A) ist, müssen wir noch beweisen, dass $(C \boxtimes C')_\bullet|_{A \times X' \cup X \times A'}$ exakt ist. Da Exaktheit faserweise definiert ist, genügt es zu beweisen, dass das Tensorprodukt von zwei Kettenkomplexen von Vektorräumen $(V_\bullet, d_\bullet)$ und $(V_\bullet', d_\bullet')$ exakt ist, falls einer der beiden Komplexe $(V_\bullet, d_\bullet)$ oder $(V_\bullet', d_\bullet')$ exakt ist.

Wir nehmen o. B. d. A. an, dass $(V_\bullet', d_\bullet')$ exakt ist. Also gilt $H_\bullet(V_\bullet', d_\bullet') = 0$. Wir haben die kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \to Z_\bullet(V) \longrightarrow V_\bullet \xrightarrow{d_\bullet} B_\bullet(V) \longrightarrow 0$$

Hierbei ist $B_n(V) = \mathrm{Bild}(d_n)$ und $Z_n(V) = \mathrm{Kern}(d_n)$. Die Differentiale von $B_\bullet(V)$ und $Z_\bullet(V)$ sind beide Null.

Diese kurze exakte Sequenz von Vektorräumen bleibt exakt, wenn wir das Tensorprodukt mit $V'_\cdot$ bilden (Dies ist für kurze exakte Sequenzen von abelschen Gruppen im allgemeinen nicht richtig). In unserem Fall erhalten wir

$$0 \longrightarrow (Z(V) \otimes V')_\cdot \longrightarrow (V \otimes V')_\cdot \longrightarrow (B(V) \otimes V')_\cdot \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

mit Tensorprodukt-Differentialen wie oben. Da das Differential von $Z_\cdot(V)$ und $B_\cdot(V)$ verschwindet, haben wir

$$H_\cdot((Z(V) \otimes V')_\cdot) = Z(V)_\cdot \otimes H_\cdot(V') = 0$$
$$H_\cdot((B(V) \otimes V')_\cdot) = B(V)_\cdot \otimes H_\cdot(V') = 0$$

Aus der langen exakten Sequenz von Homologiegruppen erhalten wir aus $(*)$: $H_\cdot((V \otimes V')_\cdot) = 0$, also ist $((V \otimes V')_\cdot, d_\cdot'')$ exakt.

Sei: $Ch(X, A)$ die Kategorie der Kettenkomplexe über (X, A) und der Kettenabb. zwischen diesen. Das Tensorprodukt definiert einen Funktor

$$Ch(X, A) \times Ch(X, A) \longrightarrow Ch(X, A)$$

Dieser ist verträglich mit den Relationen in $K(X,A)^c$ und liefert daher einen Gruppenhomomorphismus

$$K(X, A)^c \times K(X, A)^c \xrightarrow{\otimes} K(X, A)^c .$$

Def. 3.1.8.: Wir definieren das äußere Produkt

$$* : K^{-n}(X, A) \times K^{-m}(X', A') \longrightarrow K^{-(n+m)}((X, A) \times (X', A'))$$

als die Abbildung, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
K^{-n}(X, A) \times K^{-m}(X', A') \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\alpha \times \alpha", "\cong"'] & K^{-(n+m)}((X, A) \times (X', A')) \arrow[d, "\alpha", "\cong"'] \\
K((X, A) \times (I, \partial I)^n)^c \times K((X', A') \times (I, \partial I)^m)^c \arrow[r] & K((X, A) \times (X', A') \times (I, \partial I)^{n+m}).
\end{tikzcd}$$

Das äußere Produkt ist natürlich, d.h. für $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ und $g : (X', A') \longrightarrow (Y', B')$ gilt $f^*(a) * g^*(b) = (f \times g)^*(a * b)$, $a \in K^{-n}(Y, B)$, $b \in K^{-m}(Y', B')$.
Es ist außerdem assoziativ in geeignetem Sinn.

Def. 3.1.9.: Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar und sei $B \hookrightarrow X$ eine Inklusion, die eine Kofaserung ist. Sei $\Delta : (X, A \cup B) \longrightarrow (X, A) \times (X, B)$ die Diagonalenabbildung. Das Produkt

$$\cdot : K^{-n}(X, A) \times K^{-m}(X, B) \longrightarrow K^{-(n+m)}(X, A \cup B)$$

ist definiert durch $a \cdot b = \Delta^*(a * b)$.

Bemerkungen:

- Für $A = B = \emptyset$ erhalten wir $K^{-n}(X) \times K^{-m}(X) \xrightarrow{\cdot} K^{-(n+m)}(X)$. Hierdurch wird $K^*(X) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} K^{-n}(X)$ zu einem graduiert kommutativen Ring.

- Sei $A \subset B \subset X$ ein Ko-Raumtripel, dann wird

  $$K^*(B, A) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} K^{-n}(B, A) \text{ zu einem graduierten Modul über } K^*(X).$$

- Die Abb. in der langen exakten Tripelsequenz sind Homomorphismen von graduierten Moduln. Gleiches gilt für den Ausschneidungsisomorphismus.

- Für $a, a' \in K^0(X)$ und $b, b' \in K^0(Y)$ gilt

  $$(a \cdot a') * (b \cdot b') = (a * b) \cdot (a' * b').$$

  Beweis: Übung. Diagrammjagd.