

§ 3.2. Bott Periodizität - eine Beweisskizze

Welche K -Gruppen können wir bereits berechnen?

1) $K^0(pt) \cong Gr(\mathbb{N}) \cong \mathbb{Z}$

2) $K^{-1}(pt) = K^0(I, \partial I) \ni [E_1, f, E_0]_{st}$ mit $f: E_1|_{\partial I} \xrightarrow{\cong} E_0|_{\partial I}$

Dann ist $E_i \cong \mathbb{C}^n \times I$, da I zusammenziehbar ist. Anwendung dieser Isomorphismen verändert f zu $\tilde{f}: \mathbb{C}^n \times \partial I \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^n \times \partial I$. Dies entspricht einer stetigen Abbildung $\partial I \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$.

Eine Fortsetzung von $\tilde{f}$ zu einem Isomorphismus $\mathbb{C}^n \times I \rightarrow \mathbb{C}^n \times I$ entspricht der Wahl eines Pfades $I \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ wobei die Endpunkte durch $\partial I \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ vorgegeben sind. Da $GL_n(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend ist (siehe Übung), existiert zu jeder Abb. $\partial I \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ eine solche Fortsetzung. Also ist $[E_1, f, E_0]_{st} = 0$ und daher auch $K^{-1}(pt) = 0$.

Übung: Sei $KO^{-n}(X)$ die K -Theorie mit reellen statt komplexen Vektorbündeln.
Was ist $KO^{-1}(pt)$?

3) Wir haben die exakte Sequenz

$$K^0(S^1, pt) \rightarrow K^0(S^1) \rightarrow K^0(pt) \cong \mathbb{Z}$$

nach $\xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$

Ausschneidung $K^0(I, \partial I) = 0$

Wegen $[S^1 \times \mathbb{C}, 0]_{st} \mapsto [\mathbb{C}, 0]_{st} = 1$, folgt $K^0(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Frage: Was ist $K^{-2}(pt)$? Wie sieht $K^{-n}(S^2)$ aus?

Eine (nicht triviale?) Klasse in $K^0(S^2)$

Wir haben einen Homöomorphismus $S^2 \cong \mathbb{CP}^1$, indem wir zum Beispiel S^2 zunächst mit Hilfe der stereographischen Projektion mit der Einpunkt Kompaktifizierung $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ von $\mathbb{C}$ identifizieren und dann den Homöomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{CP}^1 \\ z & \mapsto & [z:1] \\ \infty & \mapsto & [1:0] \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ [z_1:z_2] & \mapsto & \begin{cases} z_1/z_2 & \text{falls } z_2 \neq 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \end{array}\right.$$

anwenden. Über $\mathbb{CP}^1 = \{V \in \mathbb{C}^2 \mid V \text{ ist eindim. Untervektorraum}\}$ lebt das sogenannte kanonische Geradenbündel $H = \{(v, V) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \mid v \in V\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$.

$$(v, V) \mapsto V$$

$$\mapsto V$$

Dies ist ein eindimensionales Vektorbündel über S^2 . Es liefert eine Klasse $[H, 0]_{st} \in K^0(S^2)$.

Sei X ein kompakter Hausdorffraum und sei $F \rightarrow X$ ein Vektorbündel.

Sei $\text{END}(F)$ die Menge aller stetigen Vektorbündel endomorphismen $F \xrightarrow{\alpha} F$. Falls F mit einer hermiteschen Metrik versehen ist (d.h. einem hermiteschen inneren Produkt in jeder Faser, das sich stetig mit den Fasern ändert), dann induziert diese Metrik eine Norm auf dem Vektorraum $\text{END}(F)$ durch

$$\|\alpha\| = \sup_{\substack{v \in F \\ \|v\|=1}} \|\alpha(v)\|.$$

(Jedes Vektorbündel über X kann mit einer hermiteschen Metrik versehen werden. Die Topologie auf $\text{END}(F)$ hängt nicht von dieser Wahl ab.) Der Unterraum $\text{ISO}(F) \subset \text{END}(F)$ aller Vektorbündel isomorphismen ist offen in $\text{END}(F)$.

Sei $F \rightarrow X$ ein Vektorbündel und $f: S^1 \rightarrow \text{ISO}(F)$ eine stetige Abbildung. Seien D^+ und D^- die obere bzw. untere Halbsphäre der S^2 . Wir führen die folgende Notation ein:

$\{F, f\}$ ist das Vektorbündel über $X \times S^2$, welches aus der Verklebung von $\underbrace{F \times D^+}_{=(pr_X^+)^* F}$ und $\underbrace{F \times D^-}_{=(pr_X^-)^* F}$ mit Hilfe des Isomorphismus $F \times S^1 \rightarrow F \times S^1$ entsteht.
 $(v, z) \mapsto (f(z)(v), z)$
 mit den Projektionen $pr_X^\pm: X \times D^\pm \rightarrow X$

Dies ist eine Verklebung über dem Pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times X & \longrightarrow & D^+ \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^- \times X & \longrightarrow & S^2 \times X \end{array}$$

wie in Lemma 3.7. Sind f und f' homotop durch Isomorphismen, dann ist $\{F, f\} \cong \{F, f'\}$.

Tatsächlich ist jedes Vektorbündel über $X \times S^2$ isomorph zu einem Bündel der Form $\{F, f\}$: Sei $E \rightarrow X \times S^2$ ein beliebiges Vektorbündel und $z_0 \in S^1 \subset D^\pm$.

Sei $i: X \rightarrow X \times S^2$. Setze $F = i^* E$. Seien $pr_X^\pm: X \times D^\pm \rightarrow X$ die Projektionen.
 $x \mapsto (x, z_0)$ und $i^\pm: X \rightarrow X \times D^\pm$
 $x \mapsto (x, z_0)$

Da $i^+ \circ pr_X^+ \cong \text{id}_{X \times D^+}$ und ähnlich für $i^- \circ pr_X^-$ gilt:

$$E|_{X \times D^+} \cong (pr_X^+)^* \circ (i^+)^* E|_{X \times D^+} \cong (pr_X^+)^* F \cong F \times D^+$$

und $E|_{X \times D^-} \cong F \times D^-$.

Über $X \times S^1$ erhalten wir aus den oberen beiden Isomorphismen einen Iso. $F \times S^1 \rightarrow F \times S^1$, der sich in eine stetige Abbildung $S^1 \rightarrow \text{ISO}(F)$ übersetzt. Die entsprechende Verklebung liefert $E \rightarrow X \times S^2$ zurück.

Beispiel: Die Verklebefunktion von H

Wenn wir $H \rightarrow \mathbb{CP}^1$ mit dem Homöomorphismus $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ zurückziehen,

lässt es sich schreiben als $H = \{(z, v) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \times \mathbb{C}^2 \mid v = \lambda \cdot (z, 1) \text{ falls } z \neq \infty \text{ oder } v = \lambda \cdot (1, 0) \text{ falls } z = \infty \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}\}$

Durch den Homöo. $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ werden D^+ und D^- abgebildet auf

$$D^+ = \{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid |z| \leq 1\}$$

$$D^- = \{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid |z| \geq 1 \text{ oder } z = \infty\}$$

Zwei Trivialisierungen: $H|_{D^+} \xrightarrow{\cong} D^+ \times \mathbb{C}$, $H|_{D^-} \xrightarrow{\cong} D^- \times \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (z, (v_1, v_2)) &\longmapsto (z, v_2) & (z, (v_1, v_2)) &\longmapsto (z, v_1) \\ (z, (wz, w)) &\longleftarrow (z, w) & (z, (w, \frac{w}{z})) &\longleftarrow (z, w) \end{aligned}$$

$$F = \mathbb{C} \quad \text{und} \quad f: S^1 \longrightarrow \text{ISO}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$$

$$z \longmapsto (w \mapsto wz) \text{ Multiplikation mit } z.$$

$$\Rightarrow H \cong \{\mathbb{C}, z\}$$

Wir definieren außerdem $H^m = \begin{cases} H^{\otimes m} & \text{falls } m \geq 0 \\ (H^*)^{\otimes m} & \text{falls } m < 0 \end{cases}$. Dann gilt $H^m \cong \{\mathbb{C}, z^m\}$ für $m \in \mathbb{Z}$.

duales Vektorbdl.

Es gilt: $\{F, f\} \otimes H^m \cong \{F, f \cdot z^m\}$ und $\{F, f\} \oplus \{F', f'\} \cong \{F \oplus F', f''\}$
 mit $f''(z) = \begin{pmatrix} f(z) & 0 \\ 0 & f'(z) \end{pmatrix} = (f \oplus f')(z)$.

Da $GL_2(\mathbb{C})$ wegzshgd. ist, gibt es einen Pfad $\gamma: I \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ mit $\gamma_0 = 1$ und $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Betrachte

$$(z, t) \longmapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma_t \cdot \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma_t^{-1} =: f_t(z)$$

Dann gilt: $H^2 \otimes \underline{\mathbb{C}} \cong \{\mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} = \{\mathbb{C}^2, f_0\} \cong \{\mathbb{C}^2, f_1\} \cong \{\mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\} \cong H \otimes H$

$\uparrow$
1-dim. triviales
Bündel über S^2

Relation in K-Theorie ist $[H^2, 0]_{st} + [\underline{\mathbb{C}}, 0]_{st} = [H, 0]_{st} + [H, 0]_{st}$.

vereinfachte Schreibweise: $H^2 + 1 = 2H \Leftrightarrow (H-1)^2 = 0$

Somit bekommen wir einen Ringhomomorphismus:

$$\mu: K^0(X) \otimes \mathbb{Z}[H]_{(H-1)^2} \xrightarrow{H \mapsto H} K^0(X) \otimes K^0(S^2) \xrightarrow{*} K^0(X \times S^2)$$

Theorem 3.2.1 (Bott): μ ist ein Isomorphismus von Ringen. Insbesondere gilt $K^0(S^2) \cong \mathbb{Z}[H]_{(H-1)^2}$.

Der Beweis besteht aus drei großen Schritten, die im folgenden skizziert werden sollen.

1. Schritt: Reduktion auf Laurent-Polynome

Satz: Jedes Vektorbündel der Form $\{F, f\}$ ist isomorph zu $\{F, e\}$, wobei $e(z) = \sum_{i=-N}^N a_i z^i$ und $a_i: F \rightarrow F$ ein Vektorbündelendomorphismus von F ist (d.h. die Übergangsfunktion ist gegeben durch ein Laurent-Polynom. Sind e_0 und e_1 homotope Übergangsfunktionen, dann sind sie auch homotop durch Laurent-polynomiale Übergangsfunktionen.

Beweisidee: Wir können stetige Funktionen $g: X \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ durch Laurent-Polynome approximieren.

$$g(x, z) = \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(x) \cdot z^n}_{\text{Konvergiert gleichmäßig gegen } g} \quad \text{mit} \quad a_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, e^{i\theta}) e^{-i\theta \cdot n} d\theta$$

Genauso können wir Funktionen $\tilde{g}: X \times S^1 \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ (Komponentenweise) approximieren. Fasse jetzt f auf als Schnitt $f: X \times S^1 \rightarrow \text{Iso}(F \times S^1) \subset \text{End}(F \times S^1)$ und wähle eine trivialisierende Überdeckung U_i von X mit untergeordneter Partition der Eins $\varphi_i: X \rightarrow [0, 1]$. Dann können wir

$$f|_{U_i \times S^1}: U_i \times S^1 \rightarrow \text{End}(F|_{U_i \times S^1}) \cong M_n(\mathbb{C}) \times U_i \times S^1$$

durch Laurent-Polynome e_i approximieren. Setze $e = \sum_i \varphi_i \cdot e_i$. Dies liefert eine Approximation von f . Liegt e nahe genug an f in Norm, dann liegt es in einem konvexen Ball um f . $\Rightarrow f$ und e sind homotop durch Übergangsfunktionen. Ähnlich zeigt man die Aussage über e_0 und e_1 . $\blacksquare$

2. Schritt (Linearisierungstrick): Wir können $\{F, e\}$ schreiben als $\{F, z^{-m} \cdot q\}$ mit einer polynomialen Übergangsfunktion q . Dann ist $\{F, z^{-m} \cdot q\} \cong \{F, q\} \otimes H^{-m}$.

Satz: Sei q eine polynomiale Übergangsfunktion vom Grad $\leq n$, dann gilt

$$\underbrace{\{n \cdot F, 1\} \oplus \{F, q\}}_{\substack{F \oplus \dots \oplus F \\ n\text{-mal}}} \cong \{(n+1) \cdot F, L^n q\}, \quad \text{wobei } L^n q \text{ eine Übergangsfunktion ist, die nur noch } z^0 \text{ und } z^1 \text{ enthält, d.h.} \\ (L^n q)(x, z) = a(x) + b(x) \cdot z.$$

Beweisidee hierzu: Die Übergangsfunktion der linken Seite lässt sich als Matrix mit Einträgen in $\text{End}(F)$ auf die folgende Weise schreiben:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & q \end{pmatrix} \quad \text{Sei } q = \sum_{i=0}^n a_i \cdot z^i. \quad \text{Zeilen- und Spaltenoperationen bringen die Matrix } B \text{ auf die neue Form:}$$

$$L^n q = A = \begin{pmatrix} 1 & -z & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & & & \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Da Zeilen- und Spaltenoperationen die Determinante erhalten, ist $L^n q(x, z)$ invertierbar und somit eine gültige Übergangsfunktion.

Außerdem ist $L^*q(x, z) = a(x) + b(x) \cdot z$. Jede Matrix, die für eine der Zeilen- oder Spaltenoperationen verantwortlich ist, ist homotop zur Identität durch Isomorphismen. Daher ist A als Übergangsfunktion homotop zu B . Folglich gilt

$$\{(n+1) \cdot F, 1 \oplus q\} \cong \{(n+1) \cdot F, L^*q\} \quad \square$$

3. Schnitt (Aufspaltung von F): Zunächst werden wir $L^*q = a + bz$ auf die Form $c + z$ bringen, ohne die Isomorphieklassse von $\{(n+1) \cdot F, L^*q\}$ zu verändern. Betrachte dazu die Homotopie

$$(x, z, t) \mapsto (1+tz) \left(b(x) \frac{z+t}{1+tz} + a(x) \right) = \underbrace{(b(x) + t a(x))}_{\text{Wähle } t_0 < 1, \text{ so dass } b(x) + t_0 a(x) \text{ invertierbar ist.}} z + t b(x) + a(x)$$

•) $z \mapsto \frac{z+t}{1+tz}$ ist ein Homöomorphismus $S^1 \rightarrow S^1$

•) $(1+tz)$ ist invertierbar für $0 \leq t < 1$

$\Rightarrow$ Der ganze Ausdruck ist invertierbar für $0 \leq t < 1$ für alle $(x, z) \in X \times S^1$

•) für $t=0$ erhalten wir L^*q

Wähle $t_0 < 1$, so dass $b(x) + t_0 a(x)$ invertierbar ist. Dies funktioniert, denn $b(x) + a(x)$ ist invertierbar.

Somit erhalten wir $\{(n+1) \cdot F, L^*q\} = \{(n+1) \cdot F, z + c\}$ mit

$$c(x) = (t_0 b(x) + a(x)) (b(x) + t_0 a(x))^{-1}$$

Insbesondere ist $z + c(x) : F_x \times \{z\} \rightarrow F_x \times \{z\}$ ein Isomorphismus, also hat $z + c(x)$ niemals 0 als Eigenwert
 $\Rightarrow c(x)$ hat keine Eigenwerte in S^1 .

Für Vektorbündelendomorphismen mit dieser Eigenschaft haben wir das folgende Spaltungs Lemma:

Lemma: Sei $c: F \rightarrow F$ ein Morphismus von Vektorbündeln, so dass $c(x): F_x \rightarrow F_x$ keine Eigenwerte in S^1 hat. Dann existieren eindeutige Untervektorbündel F_+ und F_- , so dass

a) $F = F_+ \oplus F_-$

b) $c(F_{\pm}) \subset F_{\pm}$

c) Die Eigenwerte von $c|_{F_+}$ liegen außerhalb von S^1 , die von $c|_{F_-}$ liegen innerhalb von S^1 .

Beweisidee für das Lemma: Betrachte die Situation in einer Faser $V = F_x$ mit $T = c(x): V \rightarrow V$. Sei q das char. Polynom von T . Als Polynom über $\mathbb{C}$ zerfällt es in Linearfaktoren und spaltet auf als $q = q_+ \cdot q_-$, wobei die Wurzeln von q_+ außerhalb von S^1 liegen, die Wurzeln von q_- liegen innerhalb von S^1 .

Setze $V_{\pm} = \text{Kern}(q_{\pm}(T))$. Die Polynome q_+ und q_- sind relativ prim in $\mathbb{C}[t]$, also finden wir Polynome r und s mit $r \cdot q_+ + s \cdot q_- = 1$.

$$\Rightarrow r(T) q_+(T) + s(T) q_-(T) = \text{id}_V \Rightarrow \text{Kern}(q_+(T)) \subset \text{Bild}(q_-(T))$$

Außerdem gilt: $\text{Bild}(q_-(T)) \subset \text{Kern}(q_+(T))$, denn $q_+(T) q_-(T) = q(T) = 0$.

Folglich ist $\text{Bild}(q_-(T)) = \text{Kern}(q_+(T))$, analog $\text{Bild}(q_+(T)) = \text{Kern}(q_-(T))$

$$q_+(T) r(T) + q_-(T) s(T) = \text{id}_V \Rightarrow \text{Bild}(q_-(T)) + \text{Bild}(q_+(T)) = V$$

$$r(T) q_+(T) + s(T) q_-(T) = \text{id}_V \Rightarrow \text{Kern}(q_-(T)) \cap \text{Kern}(q_+(T)) = \{0\}$$

$$\text{Also folgt: } \underbrace{V = V_+ \oplus V_-}_{a)}, \quad \underbrace{q_{\pm}(T)(Tv) = T(q_{\pm}(T)v) = 0}_{b)} \quad \forall v \in \underbrace{\text{Kern}(q_{\pm}(T))}_{V_{\pm}}$$

Eigenwerte von $T|_{V_{\pm}}$ sind Wurzeln von $q_{\pm}(T) \Rightarrow c)$

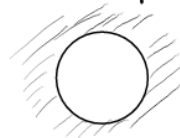
Führe dieses Splitting faserweise durch. Hierbei ist natürlich zu prüfen, dass alles stetig ist.

$$\leadsto F = F_+ \oplus F_- \text{ mit den gewünschten Eigenschaften.} \quad \blacksquare$$

Korollar: $\{F, z+c\} \cong \{F_+, 1\} \oplus \{F_-, z\}$

Beweis: Sei $C_{\pm} = C|_{F_{\pm}}$.

$$\text{Aus a) folgt } \{F, z+c\} \cong \underbrace{\{F_+, z+c_+\}}_{\text{Diagram 1}} \oplus \underbrace{\{F_-, z+c_-\}}_{\text{Diagram 2}}$$



EW von c_+ liegen außerhalb von S^1
Daher läuft die Homotopie $tz+c_+$ durch Isomorphismen und verbindet $z+c_+$ mit c_+

$$\Rightarrow \{F_+, z+c_+\} \cong \{F_+, c_+\} \cong \{F_+, 1\}$$



EW von c_- liegen innerhalb von S^1

$\Rightarrow z+tc_-$ ist Homotopie durch Isom. zu z

$$\Rightarrow \{F_-, z+c_-\} \cong \{F_-, z\}$$

□

Setze alles zusammen für Surjektivität:

Da μ ein Gruppenhomomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $[\{F, f\}, 0]_{st}$ im Bild liegt.

$$[\{F, f\}, 0]_{st} = [\{F, z^{-m} \cdot q\}, 0]_{st} = [\{F, q\} \otimes H^{-m}, 0]_{st}$$

$$= [\{(n+1) \cdot F, L^n q\} \otimes H^{-m}, 0]_{st} - [\{n \cdot F, 1\} \otimes H^{-m}, 0]_{st}$$

$$\begin{aligned}
&= [\{((n+1) \cdot F)_+, 1\} \otimes H^{-m}, 0]_{st} + [\{((n+1) \cdot F)_-, z\} \otimes H^{-m}, 0]_{st} \\
&\quad - [\{n \cdot F, 1\} \otimes H^{-m}, 0]_{st} \\
&= [\text{pr}_X^*((n+1) \cdot F)_+ \otimes H^{-m}, 0]_{st} + [\text{pr}_X^*((n+1) \cdot F)_- \otimes H^{-m}, 0]_{st} \\
&\quad - [\text{pr}_X^*(n \cdot F) \otimes H^{-m}, 0]_{st} \quad \text{liegt im Bild von } \mu.
\end{aligned}$$

Für die Injektivität betrachte den Homomorphismus

$$\nu: K^0(X \times S^2) \longrightarrow K^0(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$$

$$[\{F, z^{-m} q\}, 0]_{st} \mapsto [((n+1) \cdot F)_-, 0]_{st} \otimes \underbrace{(H-1)}_{\in \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2} + [F, 0]_{st} \otimes H^{-m}$$

Hierbei ist natürlich zu prüfen, dass ν wohl definiert ist. Wir lassen diesen Teil des Beweises aus und zeigen nur $\nu \circ \mu = \text{id}$.

$\mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$ wird erzeugt von 1 und H^{-1} . Zu berechnen ist daher nur

$$\begin{aligned}
&\nu \circ \mu([F, 0]_{st} \otimes H^{-m}) \\
&= \nu([\underbrace{\{F, z^{-m} q\}}_{= z^{-m} q}, 0]_{st}) = \underbrace{[F, 0]_{st}}_{= 0} \otimes (H-1) + [F, 0]_{st} \otimes H^{-m} \\
&\quad \text{für } q=1 \\
&\quad \text{also } n=0
\end{aligned}$$

■

Konsequenzen aus dem obigen Satz

Def 3.2.2: Sei X ein punktierter kompakter Hausdorffraum mit Basispunkt x_0 , dann heißt $\tilde{K}^n(X) := K^n(X, pt)$ die reduzierte K-Theorie von X .

Aus Theorem 3.2.2. erhalten wir sofort:

$$\cdot) \tilde{K}^0(S^2) \cong \mathbb{Z} = \langle \beta_2 := 1 - [H, 0]_{st} \rangle \quad \text{mit } \beta_2^2 = 0.$$

$\cdot)$ allgemeiner:

$$\tilde{K}^0(S^{2m}) = \langle \beta_{2m} \rangle \quad \text{mit } \beta_{2m}^2 = 0$$

wobei β_{2m} aus β_{2m-2} durch Multiplikation mit β_2 entsteht:

$$\begin{aligned}
\tilde{K}^0(S^{2m-2}) \otimes \tilde{K}^0(S^2) &\xrightarrow{\cong} K^0(D^{2m-2}, S^{2m-3}) \otimes K^0(D^2, S^1) \\
&\downarrow * \\
&K^0((D^{2m-2}, S^{2m-3}) \times (D^2, S^1)) \\
&\downarrow \cong \\
&K^0(D^{2m}, S^{2m-1}) \xrightarrow{\cong} \tilde{K}^0(S^{2m})
\end{aligned}$$

Sei $j: K^0(S^2, pt) \xrightarrow{\cong} K^0(D^2, S^1) \xrightarrow{\cong} K^0(I^2, \partial I^2) = K^{-2}(pt)$
 und $\hat{\beta}_2 = j(\beta_2)$

Theorem 3.2.3.: Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar. Dann ist

$$K^{-n}(X, A) \xrightarrow{\cdot \hat{\beta}_2} K^{-n-2}(X, A) \text{ ein Isomorphismus.}$$

Beweis: Es genügt, $n=0$ zu betrachten.

Zunächst: $A = \emptyset$.

Da die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow K^0(S^2, pt) \rightarrow K^0(S^2) \rightarrow K^0(pt) \rightarrow 0 \text{ spaltet,}$$

$$\text{ist } 0 \rightarrow K^0(X) \otimes K^0(S^2, pt) \rightarrow K^0(X) \otimes K^0(S^2) \rightarrow K^0(X) \otimes K^0(pt) \rightarrow 0 \text{ exakt.}$$

Betrachte jetzt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K^0(X) \otimes K^0(S^2, pt) & \rightarrow & K^0(X) \otimes K^0(S^2) & \rightarrow & K^0(X) \otimes \overbrace{K^0(pt)}^{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \textcircled{1} & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \rightarrow & K^0(X \times (S^2, pt)) & \rightarrow & K^0(X \times S^2) & \rightarrow & K^0(X) \rightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & \text{Iso hier wg. Thm. 3.2.1} & & \end{array}$$

$\Rightarrow$ Isomorphismus bei $\textcircled{1}$

Für $A \neq \emptyset$ gilt $K^{-n}(X, A) \cong K^{-n}(X/A, pt)$ nach Theorem 3.9 b)
 angewandt auf das Pushout-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ pt & \hookrightarrow & X/A \end{array}$$

Es genügt also, den Fall $A=pt$ zu betrachten. Hierfür ist das Argument analog zu dem oben bereits gegebenen. $\square$

Def. 3.2.4: Für $n > 0$ und ein Ko-Raumpaar (X, A) definieren wir

$$K^n(X, A) := K^{-n}(X, A)$$

und die Randabb. in der exakten Paarfolge durch

$$\begin{array}{ccc} K^0(A) & \xrightarrow{\partial^0} & K^1(X, A) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ K^{-2}(A) & \xrightarrow{\partial^{-2}} & K^{-1}(X, A) \end{array}$$

Die exakte Paarsequenz schrumpft dann zusammen auf die exakte 6-Term-Folge:

$$\begin{array}{ccccc} K^0(X, A) & \longrightarrow & K^0(X) & \longrightarrow & K^0(A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K^1(A) & \longleftarrow & K^1(X) & \longleftarrow & K^1(X, A) \end{array}$$

Die K-Theorie von $\mathbb{C}P^n$

Als nächstes wollen wir die K-Theorie von $\mathbb{C}P^n$ berechnen. Die abelsche Gruppenstruktur lässt sich leicht mit Hilfe des folgenden Satzes bestimmen:

Theorem 3.2.5: Sei X ein endlicher CW complex mit n Zellen, dann ist $K^*(X) = K^0(X) \oplus K^1(X)$ eine endlich erzeugte Gruppe mit höchstens n Erzeugern. Haben alle Zellen gerade Dimension, dann ist $K^1(X) = 0$ und $K^0(X)$ ist frei abelsch mit einem Basiselement pro Zelle.

Beweis: Für den Beweis der ersten Aussage führen wir eine Induktion über die Anzahl der Zellen durch: Für $X = pt$ ist die Aussage richtig. Es entstehe X also aus dem Raum A durch das Ankleben einer k -Zelle für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

Nach Thm. 3.9. b) angewandt auf das Pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ pt & \hookrightarrow & X/A \end{array} \quad \text{gilt: } K^*(X, A) \cong \tilde{K}^*(X/A)$$

Folglich ist $\tilde{K}^*(X/A) \rightarrow \tilde{K}^*(X) \rightarrow \tilde{K}^*(A)$ exakt. Wir haben

$$\tilde{K}^n(X/A) \cong \tilde{K}^n(S^k) = K^n(S^k, pt) \cong K^n(I^k, \partial I^k) = K^{n+k}(pt) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } n+k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

also $\tilde{K}^*(X/A) \cong \mathbb{Z}$. Wir erhalten aus der Exaktheit, dass $\tilde{K}^*(X)$ höchstens einen Erzeuger mehr hat als $\tilde{K}^*(A)$.

Für die zweite Aussage führen wir eine ähnliche Induktion durch: Für $X = pt$ ist die Aussage richtig. Sei A ein Raum, der aus Zellen gerader Dimension aufgebaut ist und entstehe X aus A durch Ankleben einer $2k$ -Zelle.

Wir betrachten $\tilde{K}^1(X/A) \rightarrow \tilde{K}^1(X) \rightarrow \tilde{K}^1(A)$. Aus unserer obigen Rechnung folgt $\tilde{K}^1(X/A) = 0$, somit auch $\tilde{K}^1(X) = 0$ via Induktion. Dann gilt aber auch $K^1(X) = 0$. Damit spaltet die exakte 6-Term-Folge die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{K}^0(X/A) \rightarrow \tilde{K}^0(X) \rightarrow \tilde{K}^0(A) \rightarrow 0$$

ab und $\tilde{K}^0(X/A) \cong \mathbb{Z}$. Nach Induktion ist $\tilde{K}^0(A)$ frei, also spaltet die Folge und wir haben $\tilde{K}^0(X) \cong \tilde{K}^0(A) \oplus \mathbb{Z}$, somit auch $K^0(X) \cong K^0(A) \oplus \mathbb{Z}$. $\square$

Aufgrund der Zellstruktur von $\mathbb{CP}^n$ erhalten wir sofort: $K^0(\mathbb{CP}^n) \cong \mathbb{Z}^{n+1}$ und $K^1(\mathbb{CP}^n) = 0$. Aber wir benötigen auch die Ringstruktur. Sei

$$L_n = \{ (v, V) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{CP}^n \mid v \in V \}$$

L_n ist das kanonische Geradenbündel über $\mathbb{CP}^n$. Für $n=1$ gilt $L_1 = H$ mit H wie oben. Sei $\mathbb{CP}^{n-1} \xrightarrow{p} \mathbb{CP}^n$ induziert von der Inklusion auf die letzten n Koordinaten, dann gilt $p^* L_n \cong L_{n-1}$.

Satz 3.2.6: $K^0(\mathbb{CP}^n) \cong \mathbb{Z}[L] / (L-1)^{n+1}$, wobei der Isomorphismus $L \mapsto [L_n, 0]_{st}$ abbildet.

Beweis: Für $n=1$ ist die Aussage richtig wie wir in Satz 3.2.1 gesehen haben. Wir betrachten die exakte Sequenz für das Paar $(\mathbb{CP}^n, \mathbb{CP}^{n-1})$. Wegen $K^1(\mathbb{CP}^n) = 0$ erhalten wir:

$$0 \rightarrow K^0(\mathbb{CP}^n, \mathbb{CP}^{n-1}) \rightarrow K^0(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{p^*} K^0(\mathbb{CP}^{n-1}) \rightarrow 0$$

Wir zeigen die folgende Aussage:

(a_n) $(L_n - 1)^n$ erzeugt den Kern von p^* .

Hieraus folgt der Satz, denn falls wir annehmen, dass $K^0(\mathbb{CP}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}[L] / (L-1)^n$, dann folgt aus der oben exakten Sequenz und (a_n), dass

$$\{1, (L-1), (L-1)^2, \dots, (L-1)^n\}$$

eine additive Basis für $K^0(\mathbb{CP}^n)$ ist. Außerdem folgt aus (a_{n+1}), dass $(L_n - 1)^{n+1} = p^*((L_{n+1} - 1)^{n+1}) = 0$. Dies fixiert die Ringstruktur vollständig.

Der Raum $\mathbb{CP}^n$ ist homöomorph zum Quotienten der Einheitskugel $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ bezüglich der Multiplikation mit Skalaren $S^1 \subset \mathbb{C}$. Statt $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ können wir ebenso gut den Rand von $D_0^2 \times \dots \times D_n^2 \subset \mathbb{C}^{n+1}$ betrachten (wobei $D_i^2 \subset \mathbb{C}$ die Einheitskreisscheibe ist) und den Quotienten bezüglich der Multiplikation mit S^1 bilden. Dann haben wir

$$\partial(D_0^2 \times \dots \times D_n^2) = \bigcup_i (\partial D_0^2 \times \dots \times \partial D_i^2 \times \dots \times D_n^2)$$

Den Quotienten von $D_0^2 \times \dots \times \partial D_i^2 \times \dots \times D_n^2$ bezüglich der S^1 -Wirkung bezeichnen wir mit $C_i \subset \mathbb{CP}^n$. C_i ist homöomorph zum Produkt $D_0^2 \times \dots \times \check{D}_i^2 \times \dots \times D_n^2$ (der i -te Faktor fehlt) und für $i \neq j$ gilt $C_i \cap C_j = \partial C_i \cap \partial C_j$.

Betrachte jetzt $C_0 \cong D_1^2 \times \dots \times D_n^2$. Wir haben $\partial C_0 = \bigcup_i \partial_i C_0$ mit

$$\partial_i C_0 \cong D_1^2 \times \dots \times \partial D_i^2 \times \dots \times D_n^2 \subset C_i$$

Die Inklusionen $(D_i^2, \partial D_i^2) \subset (C_0, \partial_i C_0) \subset (\mathbb{CP}^n, C_i)$ induzieren das

folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 K^0(D_1^2, \partial D_1^2) \otimes \dots \otimes K^0(D_n^2, \partial D_n^2) & \xrightarrow{\textcircled{1} \cong} & K^0((D_1^2, \partial D_1^2) \times \dots \times (D_n^2, \partial D_n^2)) \\
 \textcircled{2} \uparrow \cong & & \textcircled{3} \uparrow \cong \\
 K^0(C_0, \partial_1 C_0) \otimes \dots \otimes K^0(C_0, \partial_n C_0) & \xrightarrow{\cdot} & K^0(C_0, \partial C_0) \\
 \uparrow & & \uparrow \cong \textcircled{5} \\
 K^0(\mathbb{C}P^n, C_1) \otimes \dots \otimes K^0(\mathbb{C}P^n, C_n) & \xrightarrow{\cdot} & K^0(\mathbb{C}P^n, C_1 \cup \dots \cup C_n) \xrightarrow[\textcircled{4}]{\cong} K^0(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 K^0(\mathbb{C}P^n) \otimes \dots \otimes K^0(\mathbb{C}P^n) & \xrightarrow{\cdot} & K^0(\mathbb{C}P^n) \xleftarrow{\quad} K^0(\mathbb{C}P^n)
 \end{array}$$

Die unteren beiden Quadrate kommutieren aufgrund der Natürlichkeit des Produktes. Der Homomorphismus bei $\textcircled{1}$ ist gegeben durch das äußere Produkt. Nach zu prüfen, dass das obere Quadrat kommutiert ist eine Übungsaufgabe.

Zu den Isomorphismen:

- $\textcircled{1}$ ist ein Iso aufgrund von Bott-Periodizität,
- $\textcircled{2}$ wird induziert von den Homotopieäquivalenzen

$$(C_0, \partial_i C_0) \cong (D_1^2 \times \dots \times D_n^2, D_1^2 \times \dots \times \partial D_i^2 \times \dots \times D_n^2) \simeq (D_i^2, \partial D_i^2),$$
- $\textcircled{3}$ wird induziert von einem Homöomorphismus,
- $\textcircled{4}$ Die Inklusion $\mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow C_1 \cup \dots \cup C_n$ ist eine Homotopieäquivalenz, also folgt dieser Iso aus dem Fünferlemma,
- $\textcircled{5}$ Die Inklusion $C_0 \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ induziert einen Homöomorphismus

$$C_0/\partial C_0 \cong \mathbb{C}P^n / (C_1 \cup \dots \cup C_n).$$

Da $C_i \cong D^{2n}$, existiert eine Trivialisierung $f_i: L_n|_{C_i} \xrightarrow{\text{triviales Bündel}} \underline{\mathbb{C}}$. Sei $x_i = [L_n, f_i, \underline{\mathbb{C}}]_{st} \in K^0(\mathbb{C}P^n, C_i)$. Der Homomorphismus $K^0(\mathbb{C}P^n, C_i) \rightarrow K^0(\mathbb{C}P^n)$ bildet x_i auf $L-1$ ab. Wegen $K^1(C_i) = 0$ spielt die Wahl von f_i hierbei keine Rolle.

Die Einschränkung von x_i auf $(D_i^2, \partial D_i^2)$ liefert einen Generator von $K^0(D_i^2, \partial D_i^2) \cong K^{-2}(pt) \cong \mathbb{Z}$. Aus dem obigen Diagramm folgt daher, dass $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ die Gruppe $K^0(\mathbb{C}P^n, C_1 \cup \dots \cup C_n)$ erzeugt. Dann erzeugt $(L-1)^n$ aber das Bild des Homomorphismus $K^0(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1}) \rightarrow K^0(\mathbb{C}P^n)$, welcher mit dem Kern von p^* übereinstimmt. Dies beweist (α_n) . □