

§ 4. Die Hopf-Invariante

Zur Erinnerung: Wir wollen den folgenden Satz beweisen:

Satz 1.1.: Folgende Aussagen sind äquivalent

- (i) $\mathbb{R}^n$ besitzt die Struktur einer reellen Divisionsalgebra.
- (ii) Entweder ist $n=1$ oder $n \geq 2$ ist gerade und es gibt eine stetige Abbildung $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ mit Hopf-Invariante 1.
- (iii) $n \in \{1, 2, 4, 8\}$

Ziel heute: Definition der Hopf-Invariante und (i) $\Rightarrow$ (ii)

Def. 4.1.: Ein H-Raum ist ein punktierter Raum (X, e) mit Basispunkt $e \in X$ zusammen mit einer stetigen Abbildung $\mu: X \times X \rightarrow X$, so dass

- a) $\mu(e, e) = e$
- b) Die Abbildungen $X \rightarrow X; x \mapsto \mu(x, e)$ und $X \rightarrow X; x \mapsto \mu(e, x)$ sind beide homotop zu id_X .

Satz 4.2.: Falls $\mathbb{R}^n$ die Struktur einer reellen Divisionsalgebra besitzt, dann existiert eine stetige Abb. $\mu: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, so dass $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ zusammen mit μ ein H-Raum ist.

Beweis: Sei $e \in \mathbb{R}^n$ die Eins der Divisionsalgebra. Dann gilt $\|e\| \neq 0$. Wir können o. B. d. A. $\|e\| = 1$ annehmen: Wenn dies nicht gilt, dann definieren wir eine neue Divisionsalgebrenstruktur auf $\mathbb{R}^n$ durch $x * y = x \cdot y \cdot \|e\|$
neue Multiplikation $\uparrow$ $\uparrow$ alte Multiplikation
mit dem neuen Einselement $e' = \frac{e}{\|e\|}$, welches $\|e'\| = 1$ erfüllt.

O.B.d.A. ist also $e \in S^{n-1}$. Sei $\mu: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ gegeben durch $\mu(x, y) = \frac{x \cdot y}{\|x \cdot y\|}$. Dies ist wohldefiniert, da $x \cdot y \neq 0$ für $x, y \neq 0$. Außerdem gilt: $\mu(x, e) = x$ und $\mu(e, x) = x$. $\square$

Lemma 4.3.: Seien $K, \ell > 0$. Dann gilt:

$$K^0(S^{2\ell} \times S^{2K}) \cong K^0(S^{2\ell}) \otimes K^0(S^{2K}) \cong \mathbb{Z}[\alpha, \beta] / (\alpha^2, \beta^2)$$

Beweis: Wir haben $\tilde{K}^0(S^{2\ell}) \cong \mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle$ mit $\alpha^2 = 0$. Die kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow K^0(S^{2\ell}, pt) \rightarrow K^0(S^{2\ell}) \rightarrow K^0(pt) \rightarrow 0$ spaltet durch einen Ringhom. $\mathbb{Z} \cong K^0(pt) \rightarrow K^0(S^{2\ell})$. Hieraus lesen wir die Ringstruktur von $K^0(S^{2\ell})$ ab: $K^0(S^{2\ell}) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \alpha$ mit $\alpha^2 = 0$, d.h. $K^0(S^{2\ell}) \cong \mathbb{Z}[\alpha] / (\alpha^2)$ und somit $K^0(S^{2\ell}) \otimes K^0(S^{2K}) \cong \mathbb{Z}[\alpha, \beta] / (\alpha^2, \beta^2)$.

Aus Bott-Periodizität folgt: $K^0(S^{2K}, pt) \cong K^0(S^{2K-2}) \otimes K^0(S^2, pt)$ (*)

Wir wissen außerdem bereits, dass $K^0(X) \otimes K^0(S^2, pt) \xrightarrow{*} K^0(X \times (S^2, pt))$ ein Isomorphismus ist. Durch Induktion folgt mit (*), dass

$$K^0(X) \otimes K^0(S^{2k}, pt) \longrightarrow K^0(X \times (S^{2k}, pt))$$

ein Isomorphismus ist. Wir haben das folgende Diagramm mit exakten Zeilen

Diese Zeile ist exakt, da die Sequenz von (S^{2k}, pt) spaltet.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow K^0(X) \otimes K^0(S^{2k}, pt) & \rightarrow & K^0(X) \otimes K^0(S^{2k}) & \rightarrow & K^0(X) \otimes K^0(pt) & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow \cong & & \downarrow \textcircled{1} & & \downarrow \cong & \\ 0 \rightarrow K^0(X \times (S^{2k}, pt)) & \rightarrow & K^0(X \times S^{2k}) & \rightarrow & K^0(X) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \textcircled{1}$ ist ein Iso. Die Aussage folgt für $X = S^{2e}$. $\square$

Satz 4.4.: Falls S^{n-1} ein H-Raum ist, dann ist entweder $n=1$ oder $n \geq 2$ ist gerade.

Beweis: Wir zeigen: Für $k > 0$ kann S^{2k} kein H-Raum sein.

Angenommen S^{2k} ist ein H-Raum. Sei $\mu: S^{2k} \times S^{2k} \rightarrow S^{2k}$ die zugehörige Multiplikation und $e \in S^{2k}$ die Eins. Wir haben einen assoziierten Ringhom.

$$\begin{array}{ccc} \mu^*: \mathbb{Z}[\gamma]/(\gamma^2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^2, \beta^2) \\ \parallel & & \parallel \\ K^0(S^{2k}) & \longrightarrow & K^0(S^{2k} \times S^{2k}) \end{array}$$

Jetzt betrachte $S^{2k} \xrightarrow{i} S^{2k} \times S^{2k} \xrightarrow{\mu} S^{2k}$. Dies ist homotop zur Identität, d.h.

$$\begin{array}{ccc} S^{2k} & \xrightarrow{i} & S^{2k} \times S^{2k} \\ x & \longmapsto & (x, e) \end{array} \quad i^* \circ \mu^* = \text{id}_{K^0(S^{2k})} \quad (*)$$

Aber wir haben das kommutative Diagramm:

$$K^0(S^{2k} \times S^{2k}) \xrightarrow{i^*} K^0(S^{2k})$$

Seien $r, s, t \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\mu^*(\gamma) = r \cdot \alpha + s \cdot \beta + t \cdot \alpha\beta$$

Dann gilt:

$$r \cdot \gamma = i^*(\mu^*(\gamma)) \stackrel{(*)}{=} \text{id}(\gamma) = \gamma$$

also $r=1$. Genauso folgt $s=1$.

$$\begin{array}{ccc} K^0(S^{2k}) \otimes K^0(S^{2k}) & \longrightarrow & K^0(S^{2k}) \otimes K^0(pt) \\ \uparrow & & \uparrow \cong \\ \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^2, \beta^2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\gamma]/(\gamma^2) \\ \alpha & \xrightarrow{\quad} & \gamma \\ \beta & \xrightarrow{\quad} & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 0 = \mu^*(\gamma^2) = (\mu^*(\gamma))^2 = (\alpha + \beta + t \cdot \alpha\beta)^2 = 2\alpha\beta \neq 0 \quad \nexists$$

$\square$

Eine H-Raum-Struktur $\mu: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ liefert eine stetige Abbildung $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ definiert wie folgt: Wir haben $S^{2n-1} \cong \partial(D^n \times D^n) = \partial D^n \times D^n \cup D^n \times \partial D^n$.

und $S^n \cong D_+^n \cup D_-^n / \sim$ durch Verklebung entlang von $S^{n-1} = \partial D_+^n = \partial D_-^n$.

Sei $\mu: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ die H-Raum-Multiplikation mit Einselement $e \in S^{n-1}$. f ist gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} f: \partial D^n \times D^n \cup D^n \times \partial D^n & \longrightarrow & D_+^n \cup D_-^n / \sim \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \|y\| \mu(x, \frac{y}{\|y\|}) & \text{falls } (x, y) \in \partial D^n \times D^n \\ \|x\| \mu(\frac{x}{\|x\|}, y) & \text{falls } (x, y) \in D^n \times \partial D^n \end{cases} \end{array}$$

Falls $(x, y) \in \partial D^n \times \partial D^n$, gilt $f(x, y) = \mu(x, y)$. Außerdem ist $\|f(x, y)\| = \|y\|$, falls $(x, y) \in \partial D^n \times D^n$. Daher ist $f(x, 0)$ wohldefiniert. Analog ist $f(0, y)$ wohldefiniert. $\Rightarrow f$ ist wohldefiniert.

Ab jetzt nehmen wir $n = 2k$ an. Sei $f: S^{4k-1} \rightarrow S^{2k}$ eine stetige Abbildung. f ist die Anklebeabbildung einer $4k$ -Zelle D^{4k} an S^{2k} . Sei C_f definiert durch das Pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^{4k-1} & \hookrightarrow & D^{4k} \\ f \downarrow & \Gamma & \downarrow \phi \\ S^{2k} & \xrightarrow{\quad} & C_f \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Es gilt: } C_f / S^{2k} \cong S^{4k} \\ \Rightarrow K^0(C_f, S^{2k}) \cong \tilde{K}^0(S^{4k}) \end{array}$$

Wegen $\tilde{K}^1(S^{4k}) = \tilde{K}^1(S^{2k}) = 0$ erhalten wir aus der exakten Tripelsequenz für $C_f \supset S^{2k} \supset pt$ die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{K}^0(S^{4k}) \rightarrow \tilde{K}^0(C_f) \rightarrow \tilde{K}^0(S^{2k}) \rightarrow 0$$

Sei $\alpha \in \tilde{K}^0(C_f)$ das Bild des Generators $(H-1) * \dots * (H-1) \in \tilde{K}^0(S^{4k})$ in $\tilde{K}^0(C_f)$.

Sei $\beta \in \tilde{K}^0(C_f)$ ein Element, welches auf $(H-1) * \dots * (H-1) \in \tilde{K}^0(S^{2k})$ abbildet.

Dann ist das Bild von β^2 in $\tilde{K}^0(S^{2k})$ gleich 0. Also ist $\beta^2 = h_f \cdot \alpha$ für ein $h_f \in \mathbb{Z}$.

Lemma 4.5: h_f ist unabhängig von der Wahl von β .

Beweis: Sei β' ein weiteres Element wie oben. Dann gilt $\beta' = \beta + m \cdot \alpha$ für ein $m \in \mathbb{Z}$

und $(\beta')^2 = \beta^2 + 2m\alpha\beta$. Das Bild von $\alpha\beta$ in $\tilde{K}^0(S^{2k})$ ist 0.

$\Rightarrow \alpha\beta = r \cdot \alpha$ für ein $r \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow r\alpha\beta = \alpha\beta^2 = h_f \cdot \alpha^2 = 0$ da $\alpha^2 = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta = 0$, da $\alpha\beta \in \text{Bild}(\mathbb{Z} = \tilde{K}^0(S^{4k}) \hookrightarrow \tilde{K}^0(C_f))$

Also gilt $(\beta')^2 = \beta^2$. □

Def 4.6: Das Element $h_f \in \mathbb{Z}$ heißt Hopf-Invariante von f .

Satz 4.7: Sei $f: S^{4k-1} \rightarrow S^{2k}$ die stetige Abbildung assoziiert zu einer H-Raum-Struktur auf S^{2k-1} . Dann gilt $h_f \in \{\pm 1\}$.

Beweis: Sei $e \in S^{2k-1}$ das Einselement der H-Raum-Struktur.

Sei $\phi: (D^{2k} \times D^{2k}, \partial(D^{2k} \times D^{2k})) \rightarrow (C_f, S^{2k})$ die Abbildung, die von der Inklusion der $4k$ -Zelle induziert wird.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}^0(C_f) \otimes \tilde{K}^0(C_f) & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & \tilde{K}^0(C_f) \\ \uparrow \cong \leftarrow \text{Homotopic inv.} & & \uparrow \leftarrow \text{injektiv} \\ K^0(C_f, D_+^{2k}) \otimes K^0(C_f, D_-^{2k}) & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & K^0(C_f, S^{2k}) \cong \tilde{K}^0(S^{4k}) \\ (**) \quad \downarrow \phi^* \otimes \phi^* & \text{Ausschneidung} \rightarrow \cong \downarrow \phi^* & \\ K^0(D^{2k} \times D^{2k}, \partial D^{2k} \times D^{2k}) \otimes K^0(D^{2k} \times D^{2k}, \partial D^{2k} \times D^{2k}) & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & K^0(D^{2k} \times D^{2k}, \partial(D^{2k} \times D^{2k})) \\ \downarrow \cong \leftarrow \text{Homotopic inv.} & & \parallel \\ \rightarrow K^0(D^{2k} \times \{e\}, \partial D^{2k} \times \{e\}) \otimes K^0(\{e\} \times D^{2k}, \{e\} \times \partial D^{2k}) & \xrightarrow[\text{Bott-Periodizität}]{\quad \cong \quad} & K^0((D^{2k}, \partial D^{2k}) \times (D^{2k}, \partial D^{2k})) \end{array}$$

Sei $\beta \in \tilde{K}^0(C_f)$ wie oben. Betrachte das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^0(C_f, D_+^{2k}) & \xrightarrow{\phi^*} & K^0(D_+^{2k} \times D_+^{2k}, \partial D_+^{2k} \times D_+^{2k}) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \cong \\ \tilde{K}^0(S^{2k}) \cong K^0(D_-^{2k}, \partial D_-^{2k}) & \xrightarrow[\phi^*]{\cong} & K^0(D_-^{2k} \times \{e\}, \partial D_-^{2k} \times \{e\}) \end{array}$$

Nach Definition von β bildet ψ das Bild von β in $K^0(C_f, D_+^{2k})$ auf einen Generator von $K^0(D_-^{2k}, \partial D_-^{2k})$ ab.

$\Rightarrow \phi^*$ bildet das Bild von β auf einen Generator ab

$\Rightarrow$ Der Homomorphismus $(*)$ bildet $\beta \otimes \beta$ auf einen Generator ab.

$\Rightarrow \beta^2 = \pm \alpha$.

□

Bemerkung: Sei $g: S^{4k-1} \rightarrow S^{4k-1}$ eine stetige Abbildung. Dann gilt
 $h_{f \circ g} = h_f \cdot \deg(g)$. Ist $f: S^{4k-1} \rightarrow S^{2k}$ eine stetige Abbildung mit $h_f = -1$,
dann ist also $h_{f \circ g} = 1$ für eine Abb. g vom Grad -1 .

Die Adams-Operationen

Was wir bisher wissen:

-) Funktor: $K^0: \mathcal{C} \rightarrow \text{RINGE}$
 - ist verallgemeinerte Kohomologietheorie
 - Bott-Periodizität
- $\uparrow$ Kategorie der kompakten Hausdorffräume und stetigen Abbildungen

-) Divisionsalgebrenstruktur auf $\mathbb{R}^n \Rightarrow n=1$ oder $n=2k$ und $\exists f: S^{4k-1} \rightarrow S^{2k}$ mit $h_f = \pm 1$

-) h_f benutzt das Produkt in K-Theorie: $\beta^2 = h_f \cdot \alpha$

Ziel: Finde weitere Einschränkungen an die Dimension n !

Idee: Betrachte die „Automorphismen“ von K^0 , d.h. natürliche Transformationen $\psi: K^0 \rightarrow K^0$, d.h. Ringhomomorphismen $\psi_X: K^0(X) \rightarrow K^0(X)$, so dass

$$\begin{array}{ccc} K^0(X) & \xrightarrow{\psi_X} & K^0(X) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ K^0(Y) & \longrightarrow & K^0(Y) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Kommutiert. Solche Transformationen heißen} \\ \text{auch } \underline{\text{Kohomologie-Operationen}}. \end{array}$$

Auf Adams geht der folgende Satz zurück:

Theorem 4.2 (Adams): Es gibt Ringhomomorphismen $\psi^m = \psi_X^m : K^0(X) \rightarrow K^0(X)$ definiert für alle kompakten Hausdorffräume X und alle ganzen Zahlen $m \geq 0$, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

(1) Sie sind natürlich, d.h. für jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ gilt:

$$\psi_X^m \circ f^* = f^* \circ \psi_Y^m$$

(2) Für jedes eindimensionale komplexe Vektorbündel $L \rightarrow X$ gilt: $\psi^m(L) = L^m$.

Hierbei bezeichne L die Klasse $[L, 0]_{st} \in K^0(X)$ und $L^m = \underbrace{[L, 0]_{st} \cdot \dots \cdot [L, 0]_{st}}_{m \text{ mal}}$.

(3) $\psi^m \circ \psi^l = \psi^l \circ \psi^m = \psi^{m+l}$

(4) Für jede Primzahl p und $\alpha \in K^0(X)$ gilt: $\psi^p(\alpha) = \alpha^p \bmod p$, d.h.

$$\psi^p(\alpha) - \alpha^p = p \cdot \beta \text{ für ein } \beta \in K^0(X).$$

Wir werden diesen Satz später beweisen. Erst einmal zeigen wir, wie Thm. 1.1 aus diesem Satz folgt.

Bemerkungen: Wir haben $\tilde{K}^0(X) \cong \text{Kern}(K^0(X) \rightarrow K^0(\text{pt}))$ für einen punktierten Raum X .
 $\cong$
 $K^0(X, \text{pt})$

Aufgrund der Natürlichkeit der Adams-Operationen kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^0(X) & \xrightarrow{\psi^m} & K^0(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^0(\text{pt}) & \xrightarrow{\psi^m} & K^0(\text{pt}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Somit schränkt sich } \psi^m \text{ zu einem} \\ \text{Ringhomomorphismus} \\ \tilde{K}^0(X) \longrightarrow \tilde{K}^0(X) \text{ ein.} \end{array}$$

Für ein K_0 -Raumpaar (X, A) haben wir $K^0(X, A) \cong \tilde{K}^0(X/A)$

Somit induziert ψ^m einen Homomorphismus $K^0(X, A) \rightarrow K^0(X, A)$

Insbesondere erhalten wir aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^0(I^2, \partial I^2) \otimes K^0(I^{2k-2}, \partial I^{2k-2}) & \xrightarrow{*} & K^0(I^{2k}, \partial I^{2k}) \\ \downarrow p^* \otimes q^* & & \downarrow = \\ K^0(I^{2k}, \partial I^{2k}) \otimes K^0(I^{2k}, \partial I^{2k}) & \xrightarrow{\cdot} & K^0(I^{2k}, \partial I^{2k}) \end{array}$$

(wobei $p: I^{2k} \rightarrow I^2$ die Projektion auf die ersten beiden Koordinaten ist und $q: I^{2k} \rightarrow I^{2k-2}$ die Projektion auf die letzten $2k-2$ Koordinaten),
 dass $\psi^m(\alpha * \beta) = \psi^m(\alpha) * \psi^m(\beta)$ für $\alpha \in K^0(I^2, \partial I^2)$ und $\beta \in K^0(I^{2k-2}, \partial I^{2k-2})$

Satz 4.9: Die Operation $\psi^m: \tilde{K}^0(S^{2k}) \longrightarrow \tilde{K}^0(S^{2k})$ ist gegeben durch Multiplikation mit m^k .

Beweis: Betrachte zunächst den Fall $k=1$, $\tilde{K}^0(S^2)$ wird erzeugt von $\alpha := [H, 0]_{st} - [S^2 \times \mathbb{C}, 0]_{st} =: H - 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\psi^m(\alpha) &= \psi^m(H - 1) = \psi^m(H) - \psi^m(1) = H^m - 1^m \\ &= (\alpha + 1)^m - 1 = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \alpha^i - 1 = 1 + m \cdot \alpha - 1 = m \cdot \alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Für } k > 1 \text{ benutze den Isomorphismus } \tilde{K}^0(S^{2k-2}) \otimes \tilde{K}^0(S^2) & \xrightarrow[\ast]{\cong} & \tilde{K}^0(S^{2k}) \\ \parallel & & \parallel \\ K^0(I^{2k-2}, \partial I^{2k-2}) \otimes K^0(I^2, \partial I^2) & \xrightarrow{\ast} & K^0(I^{2k}, \partial I^{2k}) \end{array}$$

Es gilt für den Erzeuger α_{2k} von $\tilde{K}^0(S^{2k})$: $\alpha_{2k} = \alpha_{2k-2} \ast \alpha$,
und nach der obigen Bemerkung $\psi^m(\alpha_{2k}) = \psi^m(\alpha_{2k-2}) \ast \psi^m(\alpha)$.

$$\begin{aligned}\text{Nach Induktion erhalten wir: } \psi^m(\alpha_{2k}) &= \psi^m(\alpha_{2k-2}) \ast \psi^m(\alpha) \\ &= (m^{k-1} \cdot \alpha_{2k-2}) \ast (m \cdot \alpha) \\ &= m^k \cdot (\alpha_{2k-2} \ast \alpha) = m^k \alpha_{2k}. \quad \square\end{aligned}$$

Satz 4.10: Sei $f: S^{4k-1} \longrightarrow S^{2k}$ eine stetige Abbildung mit ungerader Hopf-Invariante. Dann gilt $k \in \{1, 2, 4\}$.

Beweis: Betrachte die kurze exakte Folge aus der Definition der Hopf-Invariante:

$$0 \longrightarrow \tilde{K}^0(S^{4k}) \longrightarrow \tilde{K}^0(C_f) \longrightarrow \tilde{K}^0(S^{2k}) \longrightarrow 0$$

Sei $\alpha \in \tilde{K}^0(C_f)$ das Bild des fixierten Generators von $\tilde{K}^0(S^{4k})$ und $\beta \in \tilde{K}^0(C_f)$ ein Element, das auf den fixierten Generator von $\tilde{K}^0(S^{2k})$ abgebildet wird. Aus Satz 4.9 und der Natürlichkeit der Adams-Operationen folgt $\psi^m(\alpha) = m^{2k} \cdot \alpha$.

Analog gilt: $\psi^m(\beta) = m^k \beta + \mu_m \alpha$ für ein $\mu_m \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \psi^m(\psi^e(\beta)) &= \psi^m(e^k \beta + \mu_e \alpha) = e^k m^k \beta + \mu_m e^k \alpha + \mu_e m^{2k} \alpha \\ &\parallel \\ \psi^e(\psi^m(\beta)) &= e^k m^k \beta + \mu_e m^k \alpha + \mu_m e^{2k} \alpha\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu_m (e^k - e^{2k}) = \mu_e (m^k - m^{2k})$, denn die von α erzeugte Untergruppe von $\tilde{K}^0(C_f)$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\text{Insbesondere gilt also: } \mu_2(3^k - 3^{2k}) &= \mu_3(2^k - 2^{2k}) \\ \Leftrightarrow \mu_2 3^k(3^k - 1) &= \mu_2 2^k(2^k - 1) \quad (\ast)\end{aligned}$$

Für die Hopf-Invariante gilt nach Def.: $\beta^2 = h_f \cdot \alpha$

Somit folgt aus den Eigenschaften der Adams-Operationen:

$$\begin{aligned}\mu_2 \alpha &= \mu_2 \alpha + 2^k \beta \quad \text{mod } 2 \\ &= \psi^2(\beta) \quad \text{mod } 2 \\ &= \beta^2 \quad \text{mod } 2 \\ &= h_f \cdot \alpha \quad \text{mod } 2 \quad \Rightarrow \mu_2 \text{ ist nach Voraussetzung ungerade!}\end{aligned}$$

Aus (*) erhalten wir: 2^k teilt $3^k - 1$, da μ_2 und 3^k ungerade sind.

Der Satz folgt jetzt aus dem nächsten Lemma. $\square$

Lemma 4.11.: Sei $k \in \mathbb{N}$. Falls 2^k den Wert $3^k - 1$ teilt, gilt $k \in \{1, 2, 4\}$.

Beweis: Sei $k = 2^e \cdot m$ mit m ungerade. Wir zeigen: Die höchste Potenz von 2, die $3^k - 1$ teilt, ist ≤ 2 für $e=0$ und $\leq 2^{e+2}$ für $e > 0$.

Aus 2^k teilt $3^k - 1$ folgt dann $k \leq e+2$ und somit $2^e \leq k \leq e+2$
also $e \leq 2$ und $k \leq 4$. Durch Überprüfen der letzten vier Möglichkeiten folgt dann $k \in \{1, 2, 4\}$.

Für den Beweis der obigen Behauptung führen wir eine Induktion über e durch:
Zunächst betrachten wir den Fall $e=1$. Doch um diesen zu verstehen, benötigen wir auch den Fall $e=0$.

•) $e=0$: $3^k - 1 = 3^m - 1$ mit m ungerade

Wegen $3 \equiv -1 \pmod{4}$ folgt $3^m - 1 = (-1)^m - 1 = 2 \pmod{4}$.

$\Rightarrow$ höchste Potenz, die $3^k - 1$ teilt ist ≤ 2 .

•) $e=1$: $3^k - 1 = 3^{2m} - 1 = (3^m - 1)(3^m + 1)$. Wir haben $3^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

Da m ungerade ist, folgt $3^m + 1 \equiv 3 + 1 \equiv 4 \pmod{8}$. Also ist die höchste Potenz, die $3^m + 1$ teilt $\leq 2^2 \Rightarrow$ die höchste Potenz, die $3^k - 1$ teilt ist $\leq 2^3$.

•) $e \rightsquigarrow e+1$, also $k \rightsquigarrow 2k$: $(3^{2k} - 1) = (3^k - 1)(3^k + 1)$ mit k gerade

$\Rightarrow 3^k + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, denn da k gerade ist - gilt $3^k \equiv 1 \pmod{4}$.

Somit ist die höchste Potenz von 2, die $(3^{2k} - 1)$ teilt $\leq 2^{e+2} \cdot 2 = 2^{e+1+2}$. $\square$

Existenz der Adams-Operationen

Zur Konstruktion von natürlichen Ringhomomorphismen $\psi: K^0(X) \rightarrow K^0(X)$

empfiehlt es sich, stetige Funktoren $\text{Vect}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}}$ anzuschauen. Insbesondere betrachten wir im folgenden die äußere Algebra.

Die äußere Algebra

Sei V ein d -dim. $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Dann heißt

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n} \quad \text{mit } V^{\otimes 0} := \mathbb{C} \quad \text{die Tensoralgebra von } V.$$

Die Multiplikation in $T(V)$ ist für elementare Tensoren gegeben durch

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \cdot (w_1 \otimes \dots \otimes w_s) = v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_s$$

Das Einselement von $T(V)$ ist $1 \in \mathbb{C} = V^{\otimes 0} \subset T(V)$. $T(V)$ ist $\mathbb{N}_0$ -graduieret durch $T^k(V) = V^{\otimes k}$.

Für die Multiplikation gilt: $T(V)_k \otimes T(V)_e \xrightarrow{\cdot} T(V)_{k+e}$. Sei $I \subset T(V)$ das (graduierete) zweiseitige Ideal erzeugt von allen Elementen der Form $v \otimes v \in V^{\otimes 2}$ für alle $v \in V$. Dann heißt:

$$\Lambda^* V = T(V) / I \quad \text{die äußere Algebra von } V.$$

Die $\mathbb{N}_0$ -Graduierung überträgt sich auf $\Lambda^* V$, d.h. es gilt

$$\Lambda^* V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^n V, \quad \text{wobei } \Lambda^n V \text{ das Bild von } T^n(V) \text{ unter}$$

der Quotientenabbildung ist. In $\Lambda^r V$ gilt die Relation

$$[v_1 \otimes \dots \otimes v_r] = [v_1 \otimes \dots \otimes v_r + w_1 \otimes \dots \otimes w_k \otimes a \otimes a \otimes w_{k+3} \otimes \dots \otimes w_r] \quad (*)$$

Wir schreiben elementare Tensoren in $\Lambda^r V$ auch: $v_1 \wedge \dots \wedge v_r$.

Aus (*) folgt dann die Relation: $v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_r = -v_1 \wedge \dots \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_r$
(Übung!)

Beispiele: ·) Es gilt $\Lambda^0 V \cong \mathbb{C}$ und $\Lambda^1 V \cong V$ nach Definition.

·) Außerdem ist $\Lambda^n V = 0$ für $n > \dim V$ (Übung! Hinweis: Basis?)

·) Für $V = \mathbb{C}$ ist $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}$ und $\Lambda^* V = \Lambda^0 V \oplus \Lambda^1 V \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

·) Für $V = \mathbb{C}^2$ ist $\Lambda^* V = \Lambda^0 V \oplus \Lambda^1 V \oplus \Lambda^2 V$
 $\cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \underbrace{\mathbb{C}}_{=\text{span}\{e_1 \wedge e_2\}}$

·) allgemeiner: $V = \mathbb{C}^r \rightsquigarrow \Lambda^* V \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^r \oplus \dots \oplus \underbrace{\mathbb{C}^{(r)}}_{=\Lambda^r V} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}$
Grad r

Der Dualraum $(\Lambda^n V)^*$ ist kanonisch isomorph zum Raum der antisymmetrischen n -Formen auf V ($\varphi: \underbrace{V \times \dots \times V}_n \rightarrow \mathbb{C}$ multilinear, antisymmetrisch).

Die Zuordnungen $V \mapsto \wedge^0 V$ und $V \mapsto \wedge^1 V$ lassen sich zu stetigen Funktoren $\text{Vekt}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Vekt}_{\mathbb{C}}$ bzw. $\text{Vekt}_{\mathbb{C}} \rightarrow \underbrace{\text{Gr Vekt}_{\mathbb{C}}}_{\text{graduierte Vektorräume}}$ erweitern.

Nach Lemma 2.5 existieren Funktoren

$$\begin{aligned} \wedge^n : \text{Vekt}_{\mathbb{C}}(X) &\rightarrow \text{Vekt}_{\mathbb{C}}(X) \\ \wedge^* : \text{Vekt}_{\mathbb{C}}(X) &\rightarrow \text{Gr Vekt}_{\mathbb{C}}(X) \end{aligned} \quad \text{und es gilt} \quad \wedge^* E \cong \underbrace{\bigoplus_{n=0}^{\infty} \wedge^n E}_{\text{nur endlich viele Summanden} \neq 0}$$

Eigenschaften dieser Funktoren:

Seien E, E_1 und E_2 endlichdim. $\mathbb{C}$ -Vektorbündel über X .

$$a) \wedge^n (E_1 \oplus E_2) \cong \bigoplus_{i+j=n} \wedge^i E_1 \otimes \wedge^j E_2 \quad (\Rightarrow \wedge^* (E_1 \oplus E_2) \cong \wedge^* (E_1) \otimes \wedge^* (E_2))$$

$$b) \wedge^0 E \cong X \times \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \wedge^1 E \cong E$$

$$c) \wedge^n E = 0 \quad \text{für} \quad n > \dim E.$$

Der Funktor $E \mapsto \wedge^* E$ überführt Summen von Vektorbündeln in Tensorprodukte und induziert daher keinen Homomorphismus $\mathcal{K}^0(X) \rightarrow \mathcal{K}^0(X)$. Um dies zu korrigieren, benötigen wir das folgende algebraische Werkzeug:

Elementarsymmetrische Polynome

Sei $p \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ ein Polynom in den Variablen $x_1, \dots, x_n$. Die Permutationsgruppe Σ_n von $\{1, \dots, n\}$ wirkt auf $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ durch:

$$(\tau \cdot p)(x_1, \dots, x_n) := p(x_{\tau^{-1}(1)}, \dots, x_{\tau^{-1}(n)}) \quad \text{für} \quad \tau \in \Sigma_n$$

d. h. durch Permutieren der Variablen. Ein Polynom heißt (Σ_n) -invariant oder symmetrisch, falls $\tau \cdot p = p \quad \forall \tau \in \Sigma_n$.

Beispiele: $\sigma_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ ist Σ_n -invariant

$\sigma_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$ ist Σ_3 -invariant

$$\sigma_r(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \quad \text{ist} \quad \Sigma_n\text{-invariant}$$

↑
elementarsymmetrische Polynome

Die elementarsymmetrischen Polynome lassen sich auf die folgende Weise erzeugen:

Sei $q(x_1, \dots, x_n; t) = \prod_{i=1}^n (1 + t x_i)$. Dann ist $\sigma_r(x_1, \dots, x_n)$ der Koeffizient von $q(x_1, \dots, x_n; t)$ vor t^r .

Außerdem gilt auch $\sigma_r(x_1, \dots, x_n) = \sigma_r(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$.

Fundamentalsatz über elementar symmetrische Polynome: Ein Polynom $p \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ ist genau dann Σ_n -invariant, wenn es von der Form

$$p(x_1, \dots, x_n) = s(e_1(x_1, \dots, x_n), \dots, e_n(x_1, \dots, x_n))$$

für ein Polynom $s \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$ ist.

Zurück zu Vektorbündeln: Sei $E \rightarrow X$ ein endlichdim. $\mathbb{C}$ -Vektorbündel.

Betrachte

$$\begin{aligned} \Lambda_t(E) &:= \sum_{i=0}^n [\Lambda^i E, 0]_{st} \cdot t^i \in K^0(X)[t] \\ &= \sum_{i=0}^n \Lambda^i E \cdot t^i \quad (\text{Kurzschreibweise}) \end{aligned}$$

Dann gilt $\Lambda_t(E_1 \oplus E_2) = \Lambda_t(E_1) \cdot \Lambda_t(E_2)$ wegen Eigenschaft a) oben

Falls $E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ für eindim. $\mathbb{C}$ -Vektorbündel $L_i \rightarrow X$, dann gilt also

$$\Lambda_t(E) = \prod_{i=1}^n \Lambda_t(L_i) = \prod_{i=1}^n (1 + L_i t)$$

Vergleiche diesen Ausdruck mit der generierenden Funktion der elementar symmetrischen Polynome $q(x_1, \dots, x_n; t)$. Durch Koeffizientenvergleich auf beiden Seiten erhalten wir

$$\Lambda^r E = e_r(L_1, \dots, L_n) \quad \text{für dieses } E \text{ und } r \in \{1, \dots, n\}!$$

Die m -te Adams-Operation angewandt auf $E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ liefert

$$\psi^m(L_1 \oplus \dots \oplus L_n) = L_1^m + \dots + L_n^m \in K^0(X)$$

Das Polynom $p_m(x_1, \dots, x_n) = x_1^m + \dots + x_n^m$ ist Σ_n -invariant, d.h. es gibt ein $s_m(y_1, \dots, y_n)$, so dass $p_m = s_m(e_1, \dots, e_n)$.

Jetzt definieren wir: $\psi^m(E) := s_m(\Lambda^1 E, \dots, \Lambda^m E)$. Dieser Ausdruck macht für jedes Vektorbündel Sinn (nicht nur für $E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$).

Nach Definition erfüllt dies: $\psi^m(L_1 \oplus \dots \oplus L_n) = L_1^m + \dots + L_n^m$

Fragen: $\rightarrow$ additiv?

$\rightarrow$ Ringhom?

$\rightarrow \psi^p(\alpha) = \alpha^p \mod p$ für p prim.

Um zu sehen, dass ψ^m tatsächlich alle gewünschten Eigenschaften hat, können wir die Natürlichkeit zusammen mit dem folgenden wichtigen Satz benutzen, um alle Behauptungen auf eindimensionale Vektorbündel zurück zu führen.

Satz (Spaltungsprinzip): Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Sei $E \rightarrow X$ ein endlich dim. $\mathbb{C}$ -Vektorbündel. Dann gibt es einen kompakten Hausdorffraum $F(E)$ zusammen mit einer stetigen Abbildung $p: F(E) \rightarrow X$, so dass $p^*: K^0(X) \rightarrow K^0(F(E))$ injektiv ist und $p^*(E)$ in eine Summe von eindim. $\mathbb{C}$ -Vektorbündeln zerfällt.

Hiermit können wir jetzt die Existenz der Adams-Operationen beweisen.

Beweis von Satz 4.8: Wir definieren ψ^m wie oben. Die Natürlichkeit von ψ^m folgt sofort aus der Funktorialität von $E \mapsto \Lambda^m E$ und der Natürlichkeit des Produktes in K -Theorie.

Seien E_1, E_2 endlich dim. $\mathbb{C}$ -Vektorbündel über X . Für die Additivität haben wir zu zeigen $\psi^m(E_1 \oplus E_2) = \psi^m(E_1) + \psi^m(E_2)$. Sei $p_1: F(E_1) \rightarrow X$ die stetige Abbildung aus dem Spaltungsprinzip für E_1 . Sei $p_2: F(p_1^* E_2) \rightarrow F(E_1)$ die analoge Abbildung für $p_1^* E_2 \rightarrow F(E_1)$. Dann gilt

$$p_1^* E_1 \cong L_1^{(1)} \oplus \dots \oplus L_r^{(1)} \quad \text{und} \quad p_2^* p_1^* E_2 = L_1^{(2)} \oplus \dots \oplus L_s^{(2)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_2^* p_1^* \psi^m(E_1 \oplus E_2) &= \psi^m(p_2^* p_1^* (E_1 \oplus E_2)) \\ &= \psi^m(p_2^* L_1^{(1)} \oplus \dots \oplus p_2^* L_r^{(1)} \oplus L_1^{(2)} \oplus \dots \oplus L_s^{(2)}) \\ &= \psi^m(p_2^* L_1^{(1)} \oplus \dots \oplus p_2^* L_r^{(1)}) + \psi^m(L_1^{(2)} \oplus \dots \oplus L_s^{(2)}) \\ &= \psi^m(p_2^* p_1^* E_1) + \psi^m(p_2^* p_1^* E_2) \\ &= p_2^* p_1^* (\psi^m(E_1) + \psi^m(E_2)) \end{aligned}$$

Aus der Injektivität von $p_2^* p_1^*$ folgt also $\psi^m(E_1 \oplus E_2) = \psi^m(E_1) + \psi^m(E_2)$.

Somit können wir ψ^m zu einem Gruppenhomomorphismus $K^0(X) \rightarrow K^0(X)$ durch $\psi^m(E_1 - E_2) = \psi^m(E_1) - \psi^m(E_2)$ erweitern. Um zu zeigen, dass ψ^m auch ein Ringhomomorphismus ist, genügt es wieder, sich auf den Fall $E_1 = L_1^{(1)} \oplus \dots \oplus L_r^{(1)}$ und $E_2 = L_1^{(2)} \oplus \dots \oplus L_s^{(2)}$ zu beschränken. Hierfür gilt

$$\begin{aligned} \psi^m(E_1 \otimes E_2) &= \psi^m\left(\bigoplus_{i,j} L_i^{(1)} \otimes L_j^{(2)}\right) = \bigoplus_{i,j} (L_i^{(1)})^m \cdot (L_j^{(2)})^m \\ &= \psi^m(E_1) \cdot \psi^m(E_2) \end{aligned}$$

Wie oben folgt aus dem Spaltungsprinzip, dass $\psi^m(E_1 \otimes E_2) = \psi^m(E_1) \cdot \psi^m(E_2)$ auch allgemein gilt. Genauso erhalten wir

$$\psi^m(\psi^e(L_1 \otimes \dots \otimes L_r)) = L_1^{me} \cdot \dots \cdot L_r^{me} = \psi^{me}(L_1 \otimes \dots \otimes L_r)$$

gilt für Polynome

$$\text{und} \quad \psi^p(L_1 \otimes \dots \otimes L_r) = L_1^p + \dots + L_r^p \stackrel{\downarrow}{=} (L_1 + \dots + L_r)^p \pmod{p}$$

□

Idee des Beweises vom Spaltungsprinzip:

Betrachte das zu $E \xrightarrow{q} X$ assoziierte projektive Bündel: Sei $s_0: X \rightarrow E$ der Nullschnitt von q . Sei

$$P(E) = (E \setminus s_0(X)) / \sim \text{ mit } v \sim w, \text{ falls } q(v) = q(w) \text{ und } v = \lambda w \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}^*$$

Sei $L = \{ (v, [w]) \in E \times P(E) \mid v = \lambda w \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}^* \}$.

Sei $p: P(E) \rightarrow X$ induziert von q . Mit der kanonischen Projektionsabb. ist $L \rightarrow P(E)$ ein eindimensionales $\mathbb{C}$ -Vektorbündel. Außerdem gibt es einen injektiven Vektorbündelmorphismus $L \rightarrow p^*E$, der in eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow L \rightarrow p^*E \rightarrow Q \rightarrow 0$$

passt. Da jede kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln spaltet, gilt $E \cong L \oplus Q$. Es bleibt zu zeigen, dass $p^*: K^0(X) \rightarrow K^0(P(E))$ injektiv ist, dann können wir $F(E)$ induktiv konstruieren. Der Beweis der Injektivität basiert auf dem Thom-Isomorphismus zusammen mit einem Mayer-Vietoris-Argument oder auf dem Leray-Hirsch-Theorem. Falls $E = X \times \mathbb{C}^n \Rightarrow P(E) \cong X \times \mathbb{C}P^{n-1}$ und $K^0(X) \otimes K^0(\mathbb{C}P^{n-1}) \xrightarrow{\cong} K^0(X \times \mathbb{C}P^{n-1})$ ist ein Iso. ■

