Waldhausens S.-Konstruktion

Ziel: Definiere höhere K-Gruppen als Homotopiegruppen eines topologischen Raumes $\Omega|wS.\mathcal{C}|$, den wir einer Waldhausen-Kategorie $\mathcal{C}$ zuordnen.

§ 1. Simpliziale Mengen, Räume und Kategorien

Sei Δ die folgende Kategorie

$Ob(\Delta)$: $[n] := \{0, \dots n\}$

$Hom_\Delta([n],[m])$: ordnungserh. Abb. $f : [n] \longrightarrow [m]$
(also $i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$)

Sei Δ^{op} die entgegengesetzte Kategorie, d.h.

$Ob(\Delta^{op}) = Ob(\Delta)$

$Hom_{\Delta^{op}}([m],[n]) = Hom_\Delta([n],[m])$ mit $f \circ_{op} g = g \circ f$

(Ein Funktor $\Delta^{op} \to \mathcal{C}$ entspricht einem kontravarianten Funktor $\Delta \to \mathcal{C}$)

Def. 1.1.: Eine Simpliziale Menge X ist ein Funktor $\Delta^{op} \longrightarrow$ MENGEN

$X_n := X([n])$ heißt Menge der n-Simplizes

Sei $d^i : [n-1] \longrightarrow [n]$ geg. durch $d^i(k) = \begin{cases} k & k < i \\ k+1 & k \geq i \end{cases}$

$s^i : [n+1] \longrightarrow [n]$ durch $s^i(k) = \begin{cases} k & k \leq i \\ k-1 & k > i \end{cases}$

$d_i := X(d^i) : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ Randabbildungen von X (face maps)

$s_i = X(s^i) : X_n \longrightarrow X_{n+1}$ Entartungsabbildungen von X (degeneracy maps)

$$X_2 \;\substack{\longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow}\; X_1 \;\substack{\xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow[d_1]{}}\; X_0$$

Morphismus zwischen simp. Mengen X und Y ist eine nat. Transformation, d.h. eine Familie von Abb. $\varphi_n : X_n \longrightarrow Y_n$, so dass

$$\begin{tikzcd} X_m \arrow[r, "\varphi_m"] \arrow[d, "X(f)"'] & Y_m \arrow[d, "Y(f)"] \\ X_n \arrow[r, "\varphi_n"'] & Y_n \end{tikzcd}$$

für $f : [n] \longrightarrow [m]$ kommutiert.

$\rightsquigarrow$ Kategorie SIMPMENGEN

allgemeiner $\boxed{\text{simpliziale Objekte in Kategorie } \mathcal{C}}$

<u>(Haupt-) Beispiel 1.2:</u> Nerv einer Kategorie. Sei CAT die Kategorie der (kleinen) Kategorien

Definiere zu jedem $[n] \in Ob(\Delta)$ eine Kategorie $\iota([n])$ mit

$$Ob(\iota([n])) = \{0, \ldots n\}$$

+ genau ein Morphismus $i \to j$, falls $i \leq j$

$\rightsquigarrow$ Verknüpfung festgelegt

Skizze:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & 1 \arrow[r] \arrow[rrr, bend left] & 2 \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & n \end{tikzcd}$$

Morphismus $f : [n] \to [m]$ induziert Funktor

$$\iota(f) : \iota([n]) \longrightarrow \iota([m]) \quad \text{durch } \iota(f)(i) = f(i)$$

Wir haben $\iota(id) = id$ und $\iota(f \circ g) = \iota(f) \circ \iota(g)$.

$$\rightsquigarrow \quad \iota : \Delta \longrightarrow CAT \quad \text{ist ein Funktor.}$$

Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie. Betrachte

$$\begin{aligned} N\mathcal{C} : \Delta^{op} &\longrightarrow MENGEN \\ [n] &\longmapsto Fun(\iota([n]), \mathcal{C}) && \text{auf Obj.} \\ \underset{\underset{Hom_{\Delta}([m],[n])}{\cap}}{f} &\longmapsto \iota(f)^* && \text{auf Mor. mit } \iota(f)^*(F) = F \circ \iota(f) \\ & && \text{für } F : \iota([n]) \longrightarrow \mathcal{C} \end{aligned}$$

$N\mathcal{C}$ ist eine simpliziale Menge, die auch <u>Nerv von $\mathcal{C}$</u> heißt

Quell-, Ziel-, Identitäts abb. $\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{lcl} N\mathcal{C}_0 & : & \text{Objekte in } \mathcal{C} \\ \uparrow\downarrow\uparrow & & \\ N\mathcal{C}_1 & : & \text{Morphismen in } \mathcal{C} \\ \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow & & \\ N\mathcal{C}_2 & : & \text{Paare von komp. baren Morphismen in } \mathcal{C} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ & \cdot \end{tikzcd}$$

~~Ein~~ Funktor $\mathcal{C} \xrightarrow{G} \mathcal{D}$ induziert Morphismus $N\mathcal{C} \to N\mathcal{D}$ von simpl. Mengen.

durch $N\mathcal{C}_n \xrightarrow{NG_n} N\mathcal{D}_n$ mit $NG_n(F) = G \circ F$.

Das heißt: Nerv-Konstruktion ist selbst ein Funktor

$$N : CAT \longrightarrow SIMPMENGEN$$

§2. Geometrische Realisierung

Standard-Simplex liefert Funktor $\mathbb{\Delta} : \Delta \longrightarrow TOP$ gegeben durch

$$\mathbb{\Delta}^n := \mathbb{\Delta}([n]) = \{ (t_0, \ldots, t_n) \in [0,1]^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \}$$

und für $f \in \mathrm{Hom}_\Delta([n],[m])$:

(leere Summe = 0)

$$\mathbb{\Delta}(f) : \mathbb{\Delta}^n \longrightarrow \mathbb{\Delta}^m \ ; \ (t_0, \ldots t_n) \longmapsto (s_0, \ldots s_m) \ \text{ mit } \ s_i = \sum_{f(j)=i} t_j$$

Def. 2.1: Sei $X : \Delta^{op} \longrightarrow MENGEN$ eine simpl. Menge, dann heißt

$$|X| = \coprod_{n \in \mathbb{N}_0} X_n \times \mathbb{\Delta}^n /\sim \quad \text{mit } (X(f)(y), t) \sim (y, \mathbb{\Delta}(f)(t)) \text{ für } y \in X_m, \ t \in \mathbb{\Delta}^n$$

die geometrische Realisierung von X.

Satz 2.2: Geom. Realisierung liefert einen Funktor $|\cdot| : SIMPMENGEN \longrightarrow TOP$ durch $|\varphi|([x,t]) = [\varphi_n(x), t]$ für $\varphi \in \mathrm{Hom}_{SIMPMENGEN}(X,Y)$, $x \in X_n$, $t \in \mathbb{\Delta}^n$.

Beweis: $|id| = id$ ✓

$|\varphi| \circ |\psi| = |\varphi \circ \psi|$ ✓

zu zeigen: $|\varphi|$ wohldefiniert

$$|\varphi|([X(f)(x), t]) = [\varphi_n(X(f)(x)), t] = [Y(f)(\varphi_m(x)), t]$$

$$|\varphi|([x, \mathbb{\Delta}(f)(t)]) = \ldots\ldots = [\varphi_m(x), \mathbb{\Delta}(f)(t)]$$

für $f \in \mathrm{Hom}_\Delta([n],[m])$, $x \in X_m$, $t \in \mathbb{\Delta}^n$. □

Def. 2.3: ·) $X : \Delta^{op} \longrightarrow TOP$ simplizialer (top.) Raum ⇝ Kategorie SIMPTOP

·) $X : \Delta^{op} \longrightarrow CAT$ simpliziale Kategorie ⇝ Kategorie SIMPCAT

Geom. Realisierung lässt sich zu Funktor

$|\cdot| : SIMPTOP \longrightarrow TOP$ erweitern ($X_n \times \mathbb{\Delta}^n$ hat Produkttopologie).

Sei $\mathcal{X}$ simpl. Kategorie, dann ist

$$[n] \longmapsto |N\mathcal{X}_n| \ \text{ ein simplizialer Raum } (= |\cdot| \circ N \circ \mathcal{X} : \Delta^{op} \to TOP)$$

Dessen geometrische Realisierung heißt auch geom. Realisierung von $\mathcal{X}$.

§3. Die $S_\cdot$-Konstruktion

basiert auf einer anderen Diagramm-Kategorie als $\iota([n])$, nämlich:

$$\text{Pfeil} : \Delta \longrightarrow CAT$$

$$[n] \longmapsto \{ (i,j) \in [n] \times [n] \mid i \leq j \}$$

mit genau einem Morphismus $(i,j) \longrightarrow (i',j')$ falls $i \leq i'$ und $j \leq j'$

$$(f : [n] \to [m]) \longmapsto \text{Pfeil}(f) : \text{Pfeil}([n]) \to \text{Pfeil}([m])$$

definiert durch $\text{Pfeil}(f)(i,j) = (f(i), f(j))$

<u>Beispiel 3.1.:</u> $\text{Pfeil}([2])$:

$$\begin{tikzcd} (0,0) \arrow[r] & (0,1) \arrow[r] \arrow[d] & (0,2) \arrow[d] \\ & (1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[d] \\ & & (2,2) \end{tikzcd}$$

(Bild zeigt nicht alle Morphismen in $\text{Pfeil}([2])$)

<u>Def. 3.2.:</u> Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Kofaserungen.

$\text{Fun}(\text{Pfeil}([n]), \mathcal{C})$ ist Kategorie von $\text{Pfeil}([n])$-Diagrammen in $\mathcal{C}$ (Mor. = nat. Trafos)

Definiere
$$S_n\mathcal{C} \subseteq \text{Fun}(\text{Pfeil}([n]), \mathcal{C})$$
als diejenige Unterkategorie, deren Objekte X folgende Bedingungen erfüllen:

(a) $X_{(j,j)} := X((j,j)) = *$ für alle $j \in [n]$.

(b) für $i < j < k$ in $[n]$ ist
$$X_{(i,j)} \rightarrowtail X_{(i,k)} \twoheadrightarrow X_{(j,k)} \quad \text{eine Kofaser-Sequenz}$$

Ein Morphismus in $S_n\mathcal{C}$ ist eine Familie $\varphi_{(i,j)} : X_{(i,j)} \to Y_{(i,j)}$ von Morphismen in $\mathcal{C}$ $\forall i,j \in [n]$, so dass

$$\begin{tikzcd} X_{(i,j)} \arrow[r, "\varphi_{(i,j)}"] \arrow[d, "X((i,j)\to(i',j'))"'] & Y_{(i,j)} \arrow[d, "Y((i,j)\to(i',j'))"] \\ X_{(i',j')} \arrow[r, "\varphi_{(i',j')}"'] & Y_{(i',j')} \end{tikzcd}$$

Kommutiert

Sei $f \in \text{Hom}_\Delta([m],[n])$ ~~und~~, definiere $S\mathcal{C}(f) : S_n\mathcal{C} \to S_m\mathcal{C}$

durch $S\mathcal{C}(f)(X) = X \circ \text{Pfeil}(f) : \text{Pf}([m]) \xrightarrow{\text{Pf}(f)} \text{Pf}([n]) \xrightarrow{X} \mathcal{C}$

also $(S\mathcal{C}(f)(X))_{(i,j)} = X_{(f(i), f(j))}$.

Wir erhalten hierdurch eine simpl. Kategorie

$$S\mathcal{C} : \Delta^{op} \to \text{CAT}$$

<u>S.-Konstruktion von $\mathcal{C}$</u>

Bem. 3.3: ·) $S_0 \mathcal{C}$: $* \circlearrowleft^{id}$ Triviale Kat. auf Nullobj. von $\mathcal{C}$

·) $S_1 \mathcal{C}$:
$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, tail] & X_{(0,1)} \arrow[d, two heads] \\ & * \end{tikzcd}$$
ist natürlich isomorph zu $\mathcal{C}$

·) $S_2 \mathcal{C}$:
$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] & X_{(0,1)} \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & X_{(0,2)} \arrow[d, two heads] \\ & * \arrow[r, tail] & X_{(1,2)} \arrow[d, two heads] \\ & & * \end{tikzcd}$$
Kategorie der Kofaserseq. von $\mathcal{C}$

Haupteigenschaft der S-Konstr.:

·) Falls $\mathcal{C}$ Waldhausen $\rightsquigarrow$ $S_n \mathcal{C}$ auch Waldhausen $\forall [n] \in Ob(\Delta)$

·) $K_i(\mathcal{C}) := \pi_{i+1}(\| wS\mathcal{C} \|)$

geom. Realisierung der simpl. Kategorie

·) Kanonische Abbildung

$$|N\mathcal{C}| \longrightarrow \Omega |NwS\mathcal{C}|$$ aus Einbettung des 1-Skeletts