

Topologische Quantenfeldtheorien I

Typisches Problem der klassischen Mechanik: Finde Bahn eines Punktteilchens im $\mathbb{R}^n$ (Masse $m=1$) unter Einfluß eines Kraftfeldes $F = -\text{grad } V$ für ein Potential $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

↳ Lässt sich als Variationsproblem formulieren:

Bahn $\gamma: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwischen den Punkten $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ergibt sich als Minimum des Funktionals

$$S(\gamma) = \int_0^t \left(\frac{1}{2} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle - V(\gamma(t)) \right) dt \quad \text{mit } \gamma(0) = x_1, \gamma(t) = x_2$$

Beispiel: freies Teilchen $V \equiv 0$. Suche Punkte γ , an denen alle Richtungsabl. von S verschwinden.

Betrachte kleine Störungen von γ : $\gamma + s \cdot \epsilon$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $\epsilon: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\epsilon(0) = \epsilon(t) = 0$

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon S &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (S(\gamma + s \cdot \epsilon) - S(\gamma)) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[\int_0^t (s \langle \dot{\gamma}, \dot{\epsilon} \rangle + \frac{1}{2} s^2 \langle \dot{\epsilon}(t), \dot{\epsilon}(t) \rangle) dt \right] \\ &= \int_0^t \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\epsilon}(t) \rangle dt = - \int_0^t \langle \ddot{\gamma}(t), \epsilon(t) \rangle dt \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für alle Störungen } \epsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \ddot{\gamma}(t) = 0 \Rightarrow \gamma$ ist linearer Pfad zwischen x_1 und x_2 .

Quantenmechanik erlaubt lediglich statistische Aussagen über den Aufenthaltsort des Teilchens

	Klassisch	quantenmechanisch
Ort des Teilchens	Punkt im $\mathbb{R}^n$	Wellenfunktion $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\langle \psi, \psi \rangle_{L^2} = 1$ $\langle \psi(x), \psi(x) \rangle$ gibt Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ am Zeitpunkt t an.
Dynamik	Bahn des Teilchens $\gamma: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$	unitäre Transformation des Hilbertraums $U: [0, t] \xrightarrow{\mathbb{R}_+} U(L^2(\mathbb{R}^n))$

Was ist die Verbindung zur klassischen Mechanik? Wie quantisiert man ein System?

Feynmans Antwort: Mittels des Pfadintegrals

Was ist der Integral(kern des Operators $U(t)$): $(U(t) \cdot \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) \cdot \psi(y, t) d^*y$

$$K(x, y, t) = C \cdot \int_{\substack{\text{alle Pfade } \gamma \\ \text{mit } \gamma(0) = x \\ \gamma(t) = y}} e^{i S(\gamma)} d\gamma$$

$\uparrow$ Normalisierungskonstante (unabh. von x, y, t)
 $\uparrow$ Jeder Pfad trägt mit $e^{i S(\gamma)}$ zum Integral bei
 $\uparrow$ Mittelung über alle Pfade von x nach y ("sum over histories")

- Das Integral beschreibt die Superposition aller klassischen Pfade gewichtet mit der klassischen Wirkung als Phase.
- Die größten Beiträge zum Integral kommen von Pfaden, bei denen $S(\gamma)$ extremal verläuft (d.h. $\delta_\epsilon S = 0$ ist) nach der Methode der stationären Phase. Dies sind gerade die klassischen Bahnen.

Sei Hilb die Kategorie der Hilberträume und beschränkten linearen Abbildungen.

Sei $\mathcal{C}_1$ die Kategorie

- mit nur einem Objekt pt
- deren Morphismen Intervalle der Form $[0, t]$ sind
- Verknüpfung ist definiert durch $[0, t] \circ [0, s] = [0, t+s]$

Aus dem quantenmechanischen System erhalten wir einen Funktor

$$Z: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \text{Hilb}$$

$$Z(pt) = L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$Z([0, t]) = U(t) \quad \text{mit} \quad Z([0, t+s]) = U(t+s) = U(t) \circ U(s) = Z([0, t]) \circ Z([0, s]).$$

Für mehrere Teilchen erhalten wir den Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \cong L^2(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{R}^m)$,
entsprechend lässt sich der Funktor Z erweitern: Sei $\mathcal{C}'_1$ die Kategorie mit

~~$\text{obj}(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}$ Menge von n Punkten endlich viele Punkte $p_1, \dots, p_n$~~
 ~~$\text{mor}(\mathcal{C}) =$ disjunkte~~

- deren Objekte disjunkte Vereinigungen von endl. vielen Punkten sind
- deren Morphismen entsprechende disjunkte Ver. von Intervallen sind
- Verknüpfung Komponentenweise wie oben

Dann: $Z: \mathcal{C}'_1 \longrightarrow \text{Hilb}$

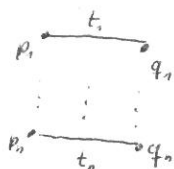
$$Z(p_1 \sqcup \dots \sqcup p_k) = L^2(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes \dots \otimes L^2(\mathbb{R}^{n_k})$$

$$Z([0, t_1] \sqcup \dots \sqcup [0, t_k]) = Z([0, t_1]) \otimes \dots \otimes Z([0, t_k]) = U_1(t_1) \otimes \dots \otimes U_k(t_k)$$

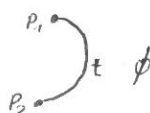
This functor maps disjoint union to tensor product.

Daher können wir ihn durch $Z(\emptyset) = \mathbb{C}$ sinnvoll erweitern.

Können wir Morphismen bisher:



Können wir die Morphismen und Z noch mehr erweitern, z.B. durch



Was ist $Z(\cdot)$?

Von der Quantenmechanik zur String-Theorie

Nichtlineare α -Modelle

Idee: Ersetze Punktteilchen durch (geschlossene) Strings

Punkt im $\mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow$ glatte Abbildung $\varphi: S^1 \rightarrow M$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Riemannsche Mfkt mit Metrik } g \\ \text{"Zielmannigfaltigkeit"} \end{array} \right.$

$\hookrightarrow$ freier Schleifenraum LM ist der Raum der Felder

Bahn eines Punktes $\rightsquigarrow$ world sheet

glatte Abbildung $\varphi: \Sigma \rightarrow M$

$\uparrow$ "Fläche" glatte Mfkt. der Dimension 2 mit Metrik

$$\text{Wirkungsfunktional: } S(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \|d\varphi\|^2$$

$\uparrow$ Norm benutzt Metriken

— Quantisierung —

Hilbertraum: $H = L^2(LM)$ L^2 -Funktionen auf dem freien Schleifenraum (moralisch)

Zeitentwicklung: $U(\Sigma)$ für eine Fläche Σ mit $\partial\Sigma = S_+^1 \sqcup S_-^1$ mit Integral kern

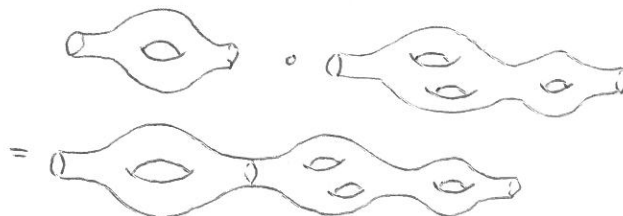
$$K(\varphi_1, \varphi_2, \Sigma) = \int_{C(\varphi_1, \varphi_2)} e^{iS(\varphi)} d\varphi \Bigg|_{C(\varphi_1, \varphi_2)} = \left\{ \varphi: \Sigma \rightarrow M \mid \varphi|_{S_+^1} = \varphi_1, \varphi|_{S_-^1} = \varphi_2 \right\}$$

Wieder erhalten wir einen Funktor. Diesmal auf der Kategorie

$\mathcal{C}_2$: • mit nur einem Objekt

• mit Morphismen Σ so, dass $\partial\Sigma = S_+^1 \sqcup S_-^1$

• mit Verknüpfung durch Verkleben von Flächen



$$Z(S^1) = H, \quad Z(\Sigma) = U(\Sigma).$$

$$Z: \mathcal{C}_2 \rightarrow \text{Hilb}$$

Dieser Funktor lässt sich ausdehnen zu einem, dessen Quellkategorie $\mathcal{C}_2'$ disjunkte Vereinigungen von Kreisen als Objekte enthält.

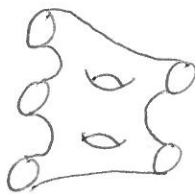
(4)

Objekte: $\bigcirc$

$\bigcirc$

$\bigcirc$

Morphismen:



Dieser Funktor liefert die Grundlage für die Definition topologischer Quantenfeldtheorien.

Atiyah '88

Chern-Simons - Theorie

- Betrachte $SU(2)$ -Hauptfaserbündel $\pi: P \rightarrow M$ über einer glatten, geschlossenen Mfkt. M
- $E = P \times_{SU(2)} \mathbb{C}^2$ sei zugehöriges Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ und Zusammenhangsform $A_E \in \Omega^1(P, \mathfrak{su}(2))$ mit $\mathfrak{su}(2) = \{T \in M_2(\mathbb{C}) \mid T = -T^* \wedge \text{tr}(T) = 0\}$
- Zweite Chern-Klasse $c_2^{IR}(E) \in H^4(M, \mathbb{R})$ wird repräsentiert durch die Form

$$\omega = \frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(\Omega_E \wedge \Omega_E) \quad \text{mit } \Omega_E \in \Omega^2(M, \text{End}(E)) \text{ Krümmung von } \nabla.$$

- $[\pi^* \omega] \in H^4(P, \mathbb{R})$ verschwindet, $\pi^* \omega = dX(A_E)$, $X(A_E) \in \Omega^3(P)$

$$\text{mit } X(A_E) = \frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(A_E \wedge dA_E + \frac{2}{3} A_E \wedge A_E \wedge A_E)$$

Angenommen, P ist trivialisierbar, dann existiert ein Schnitt $\epsilon: M \rightarrow P$. Betrachte

$$S(A_E) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \epsilon^* X(A_E) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad \text{Chern-Simons-Charakter des Zusammenhangs unabhängig von } \epsilon.$$

Spezialfall: $\dim(M) = 3$, dann ist jedes $SU(2)$ -H.f.bdl. trivialisierbar

- Betrachte nur das triviale H.f.bdl. $M \times SU(2) = P_{\text{triv}}$

$$\text{Zusammenhänge auf } P_{\text{triv}} \xrightarrow{1:1} \Omega^1(M, \mathfrak{su}(2)) = \mathcal{A}_M$$

$$S(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$$\text{Definiere } Z_k(M) = \int_{\mathcal{A}_M} e^{ikS(A)} dA, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{"Pfad"-Integral}$$

Witten 89

Idee von Witten: Integriere über alle Zusammenhänge um topologische Invariante von M zu erhalten.

Frage: Lässt sich $Z_k(M)$ als topologische Quantenfeldtheorie verstehen?

(5)

Was ist

$$Z_k(M) : Z_k(\partial_1 M) \longrightarrow Z_k(\partial_2 M) \text{ mit Flächen } \partial M = \partial_1 M \cup \partial_2 M ?$$

Betrachte glatte Einbettung

$$\gamma : S^1 \longrightarrow S^3 \quad \text{"Knoten" in } S^3 \quad \text{Bsp.}$$



Holonomie : Sei $A \in \Omega^1(S^3, \mathfrak{su}(2))$. Identifiziere $S^1 = [0, 1] / \{0, 1\}$

Sei $X_v : U \longrightarrow \mathbb{C}^2$ die Lösung der Differentialgleichung

$$dX_v(\gamma(t)) + A(\gamma(t)) \cdot X_v(\gamma(t)) = 0 \text{ in einer offenen Umgebung von } \gamma(S^1) \subset S^3$$

mit der Anfangsbedingung $X_v(\gamma(0)) = v \in \mathbb{C}^2$. Paralleltransport

~~Sei $m = \gamma(0) = \gamma(1) \in S^3$. Definiere~~

$$\begin{aligned} \text{hol}_\gamma(A) : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ v &\longmapsto X_v(1) \end{aligned}$$

$$W_\gamma(A) = \text{tr}(\text{hol}_\gamma(A))$$

physikalische Sichtweise:

$A \in \Omega^1(S^3, \mathfrak{su}(2))$ sind Felder einer Quantenfeldtheorie

$W_\gamma(A)$ sind Observablen dieser Theorie

$$\langle W_\gamma(A) \rangle_k = \int_{\mathcal{A}} e^{iS(A)} W_\gamma(A) \quad \text{ist der Vakuumerwartungswert der Observablen } W_\gamma(A)$$

Witten : $\langle W_\gamma(A) \rangle_k = \text{Jones-Polynom des Knotens } \gamma$
 ist Polynom in $q^{\frac{1}{2}}$ mit $q = e^{\frac{i\pi}{k+2}}$

Was haben topologische ~~Invarianten~~ mit Quantenfeldtheorien mit Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten zu tun?!