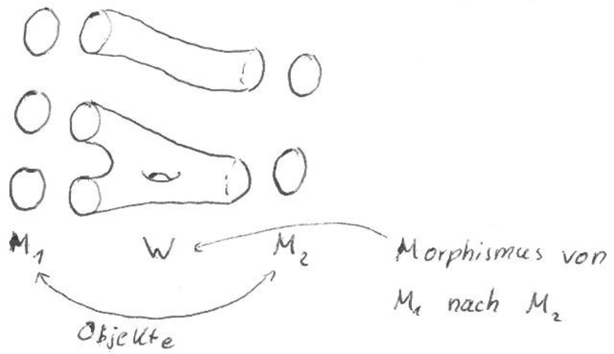
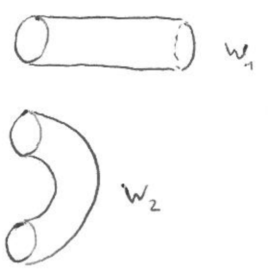
Topologische Quantenfeldtheorien II

1) Die Kobordismen Kategorie

Im folgenden konstruieren wir eine Kategorie Bord_n, deren Objekte $(n-1)$-dim. geschlossene glatte MfKt. sind. Die Morphismen zwischen zwei solchen MfKt. sind n-dim. berandete MfKt.



Betrachte



W_1 und W_2 sind diffeomorph, sollen aber unterschiedliche Morphismen repräsentieren. Wie wird dies in der Struktur kodiert?

1.1) Orientierungen

Def. 1.1.1): Sei V ein n-dim. reeller V.r. Zwei geordnete Basen $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ und $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$ von V heißen <u>gleich orientiert</u>, falls der induzierte Automorphismus $\varphi: V \to V$, der e_i auf f_i abbildet, positive Determinante hat. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf den geordneten Basen von V. Eine <u>Orientierung von V</u> ist die Wahl einer solchen Äquivalenz Klasse.

Def. 1.1.2.: Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine <u>Orientierung von M</u> ist eine Wahl von Orientierungen $\{\sigma_x\}_{x\in M}$ von T_xM für alle $x \in M$, so dass M einen glatten Atlas aus Karten $\varphi: \cancel{TM|_U \to U \times \mathbb{R}^n}$ $\underset{M}{\cup} U \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{\cap} V$ besitzt, dergestalt dass

$$D_x\varphi : (T_xM, \sigma_x) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathrm{std}) \text{ orientierungserhaltend ist.}$$

Das heißt, dass die Determinante ~~det$(D_x\varphi)$ bezüglich einer~~ der Matrix von $D_x\varphi$ bezüglich einer Basis von σ_x und der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ positiv ist. Falls $\sigma = \{\sigma_x\}_{x\in M}$ existiert, heißt M <u>orientierbar</u>. (M, σ) heißt <u>orientierte</u> MfKt. Die Elemente von σ heißen <u>pos. orientierte Basen</u>.

Bemerkung:
- Falls M zusammenhängend und orientierbar ist, dann gibt es genau zwei Orientierungen
- Orientierungen lassen sich auch für allgemeinere Vektorbündel definieren

Induzierte Orientierung

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$. Eine Orientierung auf M induziert eine Orientierung von ∂M in folgender Weise:

- $T_x(\partial M) \subset T_x M$ für $x \in \partial M$
- Eine Basis $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ von $T_x \partial M$ heißt pos. orientiert, falls $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w)$ eine pos. orientierte Basis von $T_x M$ ist für einen beliebigen nach außen zeigenden Vektor $w \in T_x M$. Die Wahl von $w \in T_x M$ spielt keine Rolle, denn $\varphi : T_x M \to T_x M$ mit $\varphi(v_i) = v_i$ und $\varphi(w) = w'$ liefert bzgl. der Basis $(v_1, \dots, v_{n-1}, w)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & * \\ & \ddots & & * \\ 0 & & 1 & * \\ & & & \mu \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu > 0.$$

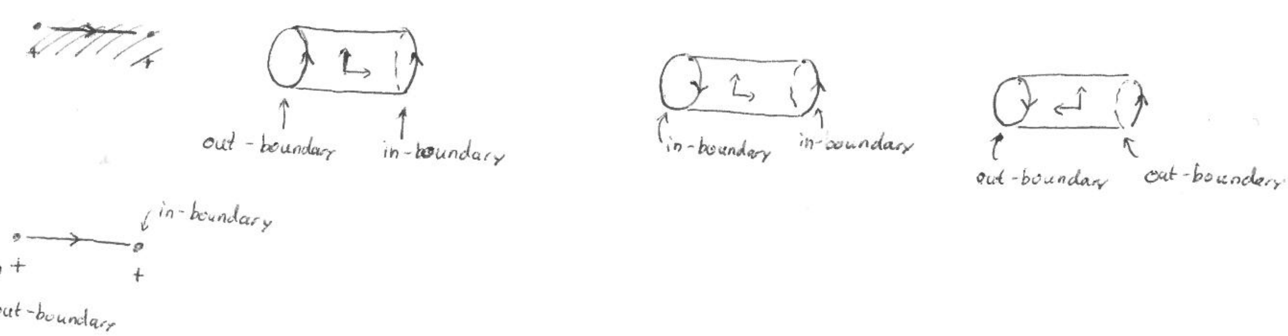
Dies lässt sich auch folgendermaßen formulieren. Das Normalenbündel von ∂M in M, definiert durch $\nu(M) = TM|_{\partial M} / T(\partial M)$ besitzt durch die nach außen zeigenden Vektoren eine kanonische Orientierung. Somit sind in der kurzen ex. Sequenz

$$0 \to T(\partial M) \to TM|_{\partial M} \to \nu(M) \to 0$$

nach Wahl einer Orientierung auf M zwei der drei Vektorbündel orientiert und induzieren damit eine Orientierung des dritten Bündels.

Def: Sei M eine orientierte glatte Mfkt. ~~Wähle eine Orientierung von ∂M.~~ mit einer Orientierung auf ∂M (nicht notwendigerweise die induzierte!). Sei $\Sigma \subset \partial M$ eine Zusammenhangskomponente mit der von ∂M induzierten Orientierung. Σ heißt in-boundary (Rein-Rand), falls die Orientierung von Σ mit der ~~induzie~~ von M ind. Or. übereinstimmt, sonst heißt Σ out-boundary (Raus-Rand :-).

Beispiel:



1.2) Verkleben von Mannigfaltigkeiten

Tools aus der Differentialtopologie

Sei M eine glatte, kompakte Mfkt. (möglicherweise mit Rand)

Def.: Sei $N \subset M$ glatte UMfkt. mit $U \cap \partial M = \emptyset$. Das Normalenbündel von N in M ist

$$\nu(N) = TM|_N / TN$$

Sei $\iota : N \hookrightarrow M$ die Inklusion. Eine tub. Umgebung von N in M ist eine Einbettung

$$\varphi : \nu(N) \longrightarrow M$$

mit $\varphi|_N = \iota$ und $\varphi(\nu(N))$ ist offene Umgebung von N in M.

Satz: N wie oben hat eine tubulare Umgebung in M.

Def.: Sei $\Sigma \subset \partial M$ eine Randkomponente von M. Ein Kragen von Σ ist eine Einbettung

$$\psi : \Sigma \times [0,1) \longrightarrow M \quad \text{mit } \psi(x,0) = x.$$

Satz: Jede Randkomp. Σ hat einen Kragen.

Lemma: Je zwei Kragen sind isotop.

Def.: Zwei Abbildungen $f_0, f_1 : V \to M$ heißen isotop, falls ein glatte Abb. $H : V \times [0,1] \to M$ existiert mit $H_0 = H(\cdot, 0) = f_0$, $H_1 = H(\cdot, 1) = f_1$ und

$$\hat{H} : V \times [0,1] \longrightarrow M \times [0,1], \quad (x,t) \longmapsto (H_t(x), t)$$

ist eine Einbettung.

Beweis: $\psi_0, \psi_1 : \partial M \times [0,1) \longrightarrow M$ zwei Kragen.

Zunächst nehmen wir an: $\psi_0(\partial M \times [0,1)) \subset \psi_1(\partial M \times [0,1))$. Sei $g = \psi_1^{-1} \circ \psi_0 : \partial M \times [0,1) \to \partial M \times [0,1)$.

Sei

$$H : \partial M \times [0,1) \times I \longrightarrow \partial M \times [0,1)$$
$$(x,s,t) \longmapsto \begin{cases} t^{-1} g(x, t \cdot s) \\ (x, \Phi(x) \cdot s) \end{cases}$$

$$\Phi : \partial M \longrightarrow \cancel{[0,1)}\ \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{d}{ds}\left(pr_{[0,1)} \circ g\right)(x, \cdot)\Big|_{s=0}$$

Übungsaufgabe: Zeige, dass H glatt ist.

$$\psi_1 \circ H_1 = \psi_0, \quad (\psi_1 \circ H_0)(x,s) = \psi_1(x, \Phi(x) \cdot s) \quad \text{mit } \Phi(x) > 0$$

~~aus~~ da $\psi_1(\cdot, \Phi(\cdot)\cdot)$ isotop zu ψ_1 ist, folgt die Beh.

Falls $\psi_0(\partial M \times [0,1)) \not\subset \psi_1(\partial M \times [0,1))$, dann ersetze ψ_0 durch $\tilde{\psi}_0(x,t) = \psi_0(x, \varepsilon t)$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$. ψ_0 und $\tilde{\psi}_0$ sind isotop.

$\square$

<u>Satz</u> (Isotopieausdehnungssatz): Seien $\varphi_0, \varphi_1 : \Sigma \times [0,1) \longrightarrow M$ isotope Kragen der Randkomp. $\Sigma \subset \partial M$ mit der Isotopie $H : \Sigma \times [0,1) \times I \longrightarrow M$. Sei $U = \varphi_0(\Sigma \times [0,1))$, dann existiert eine Diffeotopie $\hat{H} : M \times I \longrightarrow M$ und eine offene Umgebung $V \subset U$ von Σ in M mit

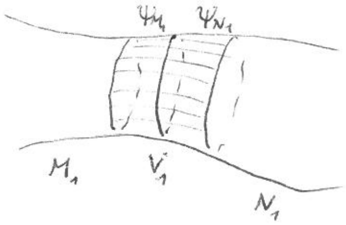
- $\hat{H}|_{V \times I} = H \circ (\varphi_0^{-1} \times id)|_{V \times I}$
- $\hat{H}_t|_{M \setminus U} = id_{M \setminus U}$.

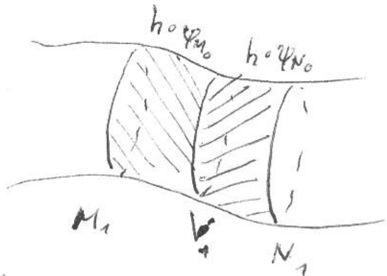
<u>Satz</u>: Seien
- W_0, W_1 glatte geschl. n-Mfkt. mit Rand
- $W_i = M_i \cup N_i$ mit $M_i \cap N_i = \partial M_i = \partial N_i = V_i$
- $h : W_0 \longrightarrow W_1$ Homöomorphismus, $h|_{M_0} : M_0 \longrightarrow M_1$ Diffeo
  $h|_{N_0} : N_0 \longrightarrow N_1$ Diffeo

Dann ex. $f : W_0 \longrightarrow W_1$ Diffeo. mit $f(M_0) = M_1$, $f(N_0) = N_1$, $f|_{V_0} = h|_{V_0}$ und $f|_{W_0 \setminus Q} = h|_{W_0 \setminus Q}$ für eine offene Umg. Q von V_0.

<u>Beweis</u>: Wähle tub. Umg. $\varphi_i : \nu(V_i) \longrightarrow W_i$. V_i ist Rand, daher $\nu(V_i) \cong V_i \times \mathbb{R}$.
Definiert Kragen $\psi_{M_i} : V_i \times [0,1) \longrightarrow M_i$ durch Einschränkung von φ_i
$\psi_{N_i} : V_i \times [0,1) \longrightarrow N_i$

Vergleiche ψ_{M_1} mit $h \circ \psi_{M_0}$ und ψ_{N_1} mit $h \circ \psi_{N_0}$





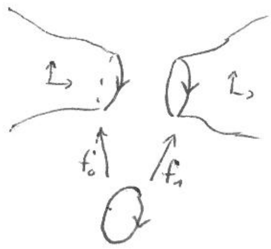
ψ_{M_1} und $h \circ \psi_{M_0}$ sind isotop mittels H_M. Isotopieausdehnungssatz liefert $\hat{H}_M : M_1 \times I \longrightarrow M_1$ mit $(\hat{H}_M)_0 = id$ in einer Umg. von V_1, $(\hat{H}_M)_1 = \psi_{M_1} \circ (h \circ \psi_{M_0})^{-1}$ in einer Umg. von V_1.
Sei $f_M = (\hat{H}_M)_1 \circ h|_{M_0}$ dann gilt f_M ist isotop zu h, $f_M = h|_{M_0}$ außerhalb einer Umg. von V_1
$f_M \circ \psi_{M_0} = \psi_{M_1}$ in einer kleineren Umg. von V_1. Analog: f_N. Dann ist $f = f_M \amalg f_N : W_0 \longrightarrow W_1$ ~~eine glatte~~ ein Diffeomorphismus mit den gewünschten Eigenschaften.

$\square$

Seien M_0, M_1 glatte orientierte Mfkt.

Sei: $f_0 : \Sigma \longrightarrow M_0$ eine Einbettung auf eine Out-Boundary,

sei $f_1 : \Sigma \longrightarrow M_1$ eine Einbettung auf eine In-Boundary.



- $\underbrace{M_0 \amalg_\Sigma M_1}_{W} = M_0 \amalg M_1 /\sim$ mit $f_0(x) \sim f_1(x)$ für $x \in \Sigma$

$= M_0 \, {}_{f_0}\!\amalg_{f_1} M_1$

Lemma: $\underset{=W}{M_0 \amalg_\Sigma M_1}$ ist eine glatte, orientierte Mfkt. (in nicht kanonischer Weise).

Beweis: Kein Problem für $x \in M_0 \setminus f_0(\Sigma) \subset W$ und $x \in M_1 \setminus f_1(\Sigma) \subset W$.

Wähle Kragen $\psi_i : \Sigma \times [0,1) \longrightarrow M_i$ (ψ_0 ist or. umkehrend, ψ_1 ist or. erhaltend)

Setze
$$\varphi : (-1,1) \times \Sigma \longrightarrow W$$
$$(t,x) \longmapsto \begin{cases} \psi_0(x,-t) & \text{für } t<0 \\ \psi_1(x,t) & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$
(or. erhaltende tub. Umg. von $f_0(\Sigma)$ in W)

Für $x \in [f_0(\Sigma)] = [f_1(\Sigma)] \subset W$ definiere Karte durch $\kappa : \underset{\mathbb{R}^{n-1}}{\overset{}{U}} \longrightarrow \underset{\Sigma}{V}$ ($U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $V \subset \Sigma$)

$$\Phi_U : \underset{\subset \mathbb{R}^n}{(-1,1) \times U} \xrightarrow{\mathrm{id} \times \kappa} (-1,1) \times \Sigma \xrightarrow{\varphi} W.$$ Dies liefert einen glatten Atlas auf W. □

Korollar aus letztem Satz: Seien α und β zwei glatte Strukturen auf $W = M_0 \amalg_\Sigma M_1$, die jeweils auf den Bildern von M_0 in W und M_1 in W dieselben glatten Strukturen induzieren, dann existiert ein Diffeomorphismus $W_\alpha \xrightarrow{\cong} W_\beta$, der auf $[f_0(\Sigma)] = [f_1(\Sigma)]$ die Identität ist.

Korollar: Ist $f_0 : \Sigma \xrightarrow{\cong} \Sigma_0 \subset M_0$ isotop zu $f_0' : \Sigma \xrightarrow{\cong} \Sigma_0 \subset M_0$, dann existiert ein Diffeomorphismus
$$M_0 \, {}_{f_0}\!\amalg_{f_1} M_1 \longleftarrow M_0 \, {}_{f_0'}\!\amalg_{f_1} M_1.$$

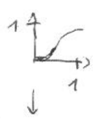
Beweis: Sei $H : \Sigma_0 \times I \longrightarrow \Sigma_0$ eine Isotopie zwischen $H_0 = f_0 \circ (f_0')^{-1}$ und $H_1 = \mathrm{id}_{\Sigma_0}$.

Konstruiere hieraus eine glatte Abbildung

$$\Phi : M_0 \longrightarrow M_0$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{für } x \notin U_0 \\ (\psi \circ \hat{H} \circ \psi^{-1})(x) & \text{für } x \in U_0 \end{cases}$$

Sei $\hat{H} : \Sigma_0 \times I \longrightarrow \Sigma_0 \times I$

$(x,t) \longmapsto (\cancel{H(x,t),t})\ H(x,\varphi(t)), \varphi(t))$



Sei $\psi : \Sigma_0 \times [0,1) \longrightarrow U_0 \subset M_0$ ein Kragen

~~Setze~~ Betrachte $\Phi \amalg \mathrm{id}_{M_1} : M_0 \, {}_{f_0'}\!\amalg_{f_1} M_1 \longrightarrow M_0 \, {}_{f_0}\!\amalg_{f_1} M_1$ und wende obigen Satz an. □

wohldefiniert, da

$$\Phi(f_0'(x)) = f_0 \circ (f_0')^{-1} \circ f_0'(x) = f_0(x)$$

Def.: Ein n-dim. Kobordismus ist ein Tripel $(M, f_0 : \Sigma_0 \to M,\ f_1 : \Sigma_1 \to M)$ bestehend aus einer glatten orientierten n-dim. Mfkt. M mit orientierten Rand Komp., zwei (n-1)-dim. glatten geschlossenen Mfkten. Σ_0 und Σ_1 und Einbettungen $f_0 : \Sigma_0 \to \partial M \hookrightarrow M$, $f_1 : \Sigma_1 \to \partial M \hookrightarrow M$ so, dass das Bild von f_0 die volle In-Boundary von M ist und das Bild von f_1 die (volle) Out-Boundary von M.

Zwei n-dim. Kobordismen (M, f_0, f_1) und (M', f_0', f_1') heißen <u>äquivalent</u>, falls ein Diffeomorphismus $F : M \to M'$ existiert so, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dd, "F"] & \\ \Sigma_0 \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "f_0'"'] & & \Sigma_1 \arrow[ul, "f_1"'] \arrow[dl, "f_1'"] \\ & M' & \end{tikzcd}$$

<u>Kobordismenkategorie</u> nCob

<u>Obj.</u>: (n-1)-dim. glatte geschlossene Mfkt. mit Orientierung

<u>Mor.</u>: $Hom(\Sigma_0, \Sigma_1)$ = Äquivalenzklassen von n-dim. Kobordismen

$$[M, f_0 : \Sigma_0 \to M,\ f_1 : \Sigma_1 \to M]$$

<u>Verknüpfung</u>: $[M, f_0, f_1] \circ [N, g_1, g_2] = [M \underset{f_1\ g_1}{\sqcup} N,\ \tilde{f_0} : \Sigma_0 \to M \to M \underset{\Sigma_1}{\sqcup} N,\ \tilde{g_2} : \Sigma_2 \to N \to M \underset{\Sigma_1}{\sqcup} N]$

<u>Identität</u>: $[\Sigma \times I,\ \iota_0 : \Sigma \to \Sigma \times I,\ \iota_1 : \Sigma \to \Sigma \times I]$

Bemerkung: $M \underset{\Sigma}{\sqcup} (\Sigma \times I) \cong M$ mittels Kragen.

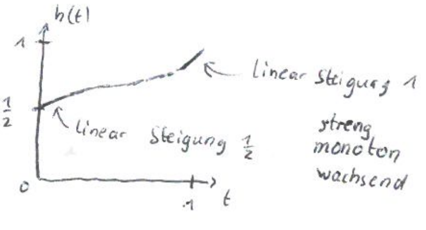
— || —

<u>Beweis zur Bemerkung</u>:

Sei φ der Kragen von Σ in M, der benutzt wurde, um die glatte Struktur auf $M \underset{\Sigma}{\sqcup} (\Sigma \times I)$ zu definieren

$\varphi : \Sigma \times [0,1) \to M$, $U = Im\,\varphi \subset M$ $\quad \varphi^{-1} : U \to \Sigma \times [0,1)$
$\varphi^{-1} = (\alpha, \beta)$

Wähle $h : [0,1) \to [0,1)$ mit



$$f : M \underset{\Sigma}{\sqcup} (\Sigma \times I) \longrightarrow M$$

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(\alpha(x), h(\beta(x))) & \text{für } x \in U \\ \varphi(y, \tfrac{1}{2} t) & \text{für } x = (y,t) \in \Sigma \times I \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$