Def.: Eine n-dim. TQFT ist eine Vorschrift Z, die jeder glatten, geschlossenen, or. $(n-1)$-dim. Mfkt. Σ einen Vektorraum $Z(\Sigma)$ zuordnet und jedem glatten or. Kobordismus (M, Σ_1, Σ_2) eine lineare Abb. $Z(M): Z(\Sigma_1) \longrightarrow Z(\Sigma_2)$, so dass das folgende Axiomensystem erfüllt ist:

(1) Äquivalente Kobordismen haben dasselbe Bild

$$(M, \Sigma_1, \Sigma_2) \sim (M', \Sigma_1, \Sigma_2) \Rightarrow Z(M) = Z(M')$$

(2) Dem Zylinder $\Sigma \times I$ als Kobordismus zwischen Σ und Σ wird die Identität zugeordnet. $Z(\Sigma \times I, \Sigma, \Sigma) = id_{Z(\Sigma)}$

(3) Für eine Zerlegung $W = M_1 \sqcup_{\Sigma} M_2$ gilt $Z(W) = Z(M_2) \circ Z(M_1)$

(4) Disjunkte Vereinigungen werden auf Tensorprodukte abgebildet

$$\Sigma = \Sigma' \sqcup \Sigma'' \Rightarrow Z(\Sigma) = Z(\Sigma') \otimes Z(\Sigma'')$$

$$(M \sqcup M', \Sigma_1 \sqcup \Sigma_1', \Sigma_2 \sqcup \Sigma_2'): Z(M \sqcup M') = Z(M) \otimes Z(M'): Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_1') \longrightarrow Z(\Sigma_2) \otimes Z(\Sigma_2')$$

(5) Die leere Mfkt. wird auf den Körper $\mathbb{K}$ abgebildet und der leere Kobordismus auf die Identität $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

Konsequenzen aus den Axiomen:

Def.: Sei Σ eine $(n-1)$-dim. Mfkt. wie oben und $Diff(\Sigma)$ die Gruppe der Diffeomorphismen $f: \Sigma \to \Sigma$. Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation „Isotopie" auf $Diff(\Sigma)$. Die Abbildungsklassengruppe $MCG(\Sigma)$ ist definiert durch

$$MCG(\Sigma) = Diff(\Sigma)/\sim .$$

Jedes Element $f \in Diff(\Sigma)$ liefert einen Kobordismus: $(\Sigma \times I,\ i_0: \Sigma \to \Sigma \times I,\ i_1 \circ f: \Sigma \xrightarrow{f} \Sigma \to \Sigma \times I)$
$= {}_{id}(\Sigma \times I)_f$

Lemma: ${}_{id}(\Sigma \times I)_f \sqcup_{id} (\Sigma \times I)_g \cong {}_{id}(\Sigma \times I)_{f \circ g}$.

Beweis: Betrachte den Homöomorphismus

$${}_{id}(\Sigma \times I)_f \sqcup_{id} (\Sigma \times I)_g \xrightarrow{id \sqcup (f \times id)} {}_{id}(\Sigma \times I)_{id} \sqcup_{id} (\Sigma \times I)_{f \circ g}$$

Nach dem Glättungssatz erhalten wir einen ~~Iso~~ Diffeo. Außerdem ist ${}_{id}(\Sigma \times I)_{id} \sqcup_{id} (\Sigma \times I)_{f\circ g} \cong {}_{id}(\Sigma \times I)_{f \circ g}$. □

Lemma: Sind $f, f' \in Diff(\Sigma)$ isotope Diffeomorphismen

Beweis: Sei $H: \Sigma \times I \longrightarrow \Sigma$ eine Isotopie zwischen $H_0 = id_\Sigma$ und $H_1 = f' \circ f^{-1}$.

Sei $\hat{H}: \Sigma \times I \longrightarrow \Sigma \times I$, $(x, t) \longmapsto (H(x,t), t)$, dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma \times I \arrow[dd, "\hat{H}"] & \\
\Sigma \arrow[ur, "i_0"] \arrow[dr, "i_0"'] & & \Sigma \arrow[ul, "i_1 \circ f"'] \arrow[dl, "i_1 \circ f'"] \\
 & \Sigma \times I &
\end{tikzcd}$$

□

<u>Korollar</u>: Der Vektorraum $Z(\Sigma)$ trägt eine Darstellung von $MCG(\Sigma)$.

<u>Beweis</u>: $MCG(\Sigma) \times Z(\Sigma) \longrightarrow Z(\Sigma)$ wird induziert durch

$$\begin{aligned} MCG(\Sigma) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(Z(\Sigma), Z(\Sigma)) \\ [f] &\longmapsto Z({}_{id}(\Sigma \times I)_f) . \end{aligned}$$ $\square$

$\boxed{\text{ab hier geändert}}$

Sei $\overline{\Sigma}$ die Mannigfaltigkeit Σ mit umgekehrter Orientierung.
Es gibt mehrere Möglichkeiten $\Sigma \times I$ als Kobordismus zu interpretieren

$(\Sigma \times I, i_0, i_1) : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ 

$(\Sigma \times I, j_1, j_0) : \overline{\Sigma} \longrightarrow \overline{\Sigma}$ "

$b = (\Sigma \times I, i_0 \amalg j_1, \emptyset) : \Sigma \amalg \overline{\Sigma} \longrightarrow \emptyset$ 

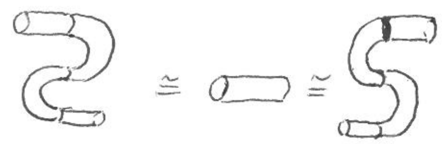
$c = (\Sigma \times I, \emptyset, j_0 \amalg i_1) : \emptyset \longrightarrow \overline{\Sigma} \amalg \Sigma$ 

Sei $V = Z(\Sigma)$, $W = Z(\overline{\Sigma})$. Wir erhalten lineare Abbildungen

$\beta = Z(b) : V \otimes W \longrightarrow K$

$\gamma = Z(c) : K \longrightarrow W \otimes V$

und die Relationen

 implizieren $\underset{id_V}{\underbrace{(\beta \otimes id) \circ (id_V \otimes \gamma)}} : V = V \otimes K \to V \otimes W \otimes V \longrightarrow K \otimes V = V$ (*)

$\underset{id_W}{\underbrace{(id_W \otimes \beta) \circ (\gamma \otimes id_W)}} : W = K \otimes W \to W \otimes V \otimes W \longrightarrow W$

<u>Lemma</u>: Seien V und W K-Vektorräume. Sei $\beta : V \otimes W \to K$ eine Paarung. Dann existiert $\gamma : K \to W \otimes V$ mit der Eigenschaft (*) genau dann, wenn V endlich dimensional ist und die induzierte Abb. $\overline{\beta} : V \longrightarrow W^*$ injektiv.

<u>Beweis</u>: Angenommen $\exists \gamma$. Setze $\gamma(1) = \sum_i w_i \otimes v_i$, dann folgt aus (*):
$x = \sum_i \beta(x, w_i) v_i \Rightarrow V$ endlich dimensional.
<u>Sei</u> $x \in V$ mit $\overline{\beta}(x) = 0 = \beta(x, \cdot)$. Dann ist insbesondere $\beta(x, w_i) = 0$ also $x = 0 \Rightarrow \overline{\beta}$ injektiv.
Sei jetzt V endlich dim. und $\overline{\beta}$ injektiv. Wähle Basis v_i von V und setze $\alpha_i = \overline{\beta}(v_i) \in W^*$.
Die α_i sind lin. unabh. Betrachte
$$\begin{aligned} \alpha : W &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ w &\longmapsto (\alpha_1(w), \dots, \alpha_n(w)) \end{aligned} \quad \text{mit } n = \dim V$$

Angenommen α ist nicht surjektiv, dann ex. eine orth. Zerlegung

$$\mathbb{R}^n = \alpha(X) \oplus X \quad \text{begl. des Standardskalarproduktes}$$

Wähle $x \in X$ mit $x = (x_1, \dots x_n) \neq 0$. Dann gilt:

$$x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = \langle x, \alpha(\cdot)\rangle = 0 \quad ⚡ \quad \Rightarrow \alpha \text{ surjektiv.}$$

$\Rightarrow \exists$ Vektoren $w_i \in W$ mit $\alpha_i(w_j) = \delta_{ij} = \beta(v_i, w_j)$

Setze $\gamma(1) = \sum_i w_i \otimes v_i$. Dies erfüllt $(*)$.

__Korollar:__ In einer TQFT Z sind alle Vektorräume $Z(\Sigma)$ endlichdimensional.

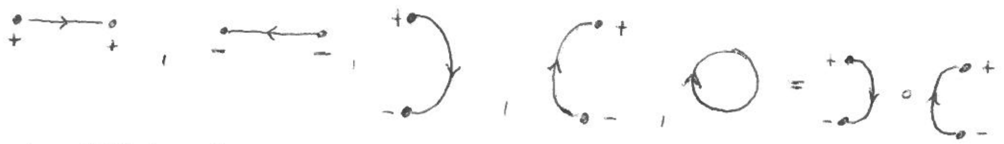
__Bemerkung:__ Schlecht für phys. Interpretation. Hier waren $Z(\Sigma) = L^2(X)$ Hilberträume unendlicher Dimension. Dies liegt an der Verwendung des algebraischen Tensorprodukts. Ausweg: betrachte andere Zielkategorien statt $Vekt(K)$ wie $Hilb$ oder Ban.

__Korollar:__ Ist $\beta: V \otimes W \longrightarrow K$ ~~ist~~ induziert von einer TQFT Z, dann ist β nicht ausgeartet, folglich ist ~~$Z(\bar{\Sigma}) \cong Z(\Sigma)^*$~~ $Z(\bar{\Sigma}) \cong Z(\Sigma)^*$

__Beweis:__ $\bar{\beta}: V \longrightarrow W^*$, $\tilde{\beta}: W \longrightarrow V^*$ sind beide injektiv $\Rightarrow \dim V = \dim W$. $\square$

__Klassifikation eindimensionaler TQFTs__

- 0-dim Mfkt: disjunkte Vereinigung von orientierten Punkten $\bullet +$, $\bullet -$
- 1-dim Kobordismen: disjunkte Vereinigungen von



Z ist vollständig fixiert durch die Wahl von $Z(\bullet_+)$, $Z(\bullet_-)$ und Paarung $Z(\supset)$, Kopaarung $Z(\subset)$.

__Def.:__ Zwei topologische Quantenfeldtheorien Z und Z' heißen natürlich __äquivalent__, falls zu jedem Σ ein Isomorphismus $\varphi_\Sigma: Z(\Sigma) \longrightarrow Z'(\Sigma)$ existiert mit

$$\begin{tikzcd} Z(\Sigma_1) \arrow[r, "\varphi_{\Sigma_1}"] \arrow[d, "Z(M)"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Z'(\Sigma_1) \arrow[d, "Z'(M)"] \\ Z(\Sigma_2) \arrow[r, "\varphi_{\Sigma_2}"] & Z'(\Sigma_2) \end{tikzcd}$$

__Thm.:__ Jeder endlich dim. Vektorraum V definiert eine eindim TQFT Z'_v durch

$Z'_v(\bullet_+) = V$, $Z'_v(\bullet_-) = V^*$, $Z'_v(\supset)$ Kanonische Paarung und $Z'_v(\subset): K \longrightarrow V \otimes V^*$

$$1 \longmapsto \sum_i v_i \otimes v_i^*$$

Lem.: Sei Z eine endim. TQFT. Dann ist Z nat. Äquivalent zu $Z'_{Z(\Sigma)}$.

Beweis: $\gamma = Z(C): K \longrightarrow W \otimes V$

$1 \longmapsto \sum_i w_i \otimes v_i$ mit v_i, w_i lin. unabh.

$\varphi_{\circ_+}: V \xrightarrow{id} V$

$\varphi_{\circ_-}: W \longrightarrow V^*$ liefert nat. Äquivalenz.

$w_i \longmapsto v_i^*$

□

Monoidale Kategorien

Definition: Eine strikte monoidale Kategorie oder strikte Tensorkategorie ist ein Tupel $(\mathcal{C}, \otimes, u)$ bestehend aus einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem Funktor $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ und einem weiteren Funktor $u: \mathbb{1} \longrightarrow \mathcal{C}$ (wobei $\mathbb{1}$ die Kategorie mit einem Objekt und einem Morphismus ist), so dass folgende ~~Axiome gelten~~ Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "id \times \otimes"] \arrow[d, "\otimes \times id"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[d, "\otimes"] \\ \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\otimes"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\otimes"] & \mathcal{C} \\ \mathcal{C} = \mathcal{C} \times \mathbb{1} \arrow[u, "id \times u"] \arrow[ur, "id"'] \arrow[ur, phantom, "\#", near start] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\otimes"] & \mathcal{C} \\ \mathbb{1} \times \mathcal{C} = \mathcal{C} \arrow[u, "u \times id"] \arrow[ur, "id"'] \arrow[ur, phantom, "\#", near start] & \end{tikzcd}$$

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ strikte Tensorkategorien. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißt monoidal, falls die Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\otimes_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "F \times F"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathcal{C} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{D} \times \mathcal{D} \arrow[r, "\otimes_{\mathcal{D}}"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "u_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "u_{\mathcal{D}}"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "F"] \arrow[dl, phantom, "\#", near start] \\ & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

kommutieren.

Eine Symmetrie für eine strikte Tensorkategorie $\mathcal{C}$ ist eine Familie von Morphismen $\tau_{X,Y}$ indiziert durch Paare von Objekten aus $\mathcal{C}$ mit den Eigenschaften

$$\tau_{X,Y}: X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X$$

(i) Die Abbildungen sind natürlich in X und Y.

(ii) Die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} X \otimes Y \otimes Z \arrow[rr, "\tau_{X, Y \otimes Z}"] \arrow[dr, "\tau_{X,Y} \otimes id_Z"'] & \arrow[d, phantom, "\#"] & Y \otimes Z \otimes X \\ & Y \otimes X \otimes Z \arrow[ur, "id \otimes \tau_{X,Z}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \otimes Y \otimes Z \arrow[rr] \arrow[dr, "id_X \otimes \tau_{Y,Z}"'] & \arrow[d, phantom, "\#"] & Z \otimes X \otimes Y \\ & X \otimes Z \otimes Y \arrow[ur, "\tau_{X,Z} \otimes id_Y"'] & \end{tikzcd}$$

(iii) Es gilt: $\tau_{Y,X} \circ \tau_{X,Y} = id_{X \otimes Y}$.

Ein Funktor zwischen symmetrischen monoidalen Kategorien $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißt symmetrisch, falls gilt: $F(\tau^{\mathcal{C}}_{X,Y}) = \tau^{\mathcal{D}}_{F(X), F(Y)}$.

…piele: a) $Vekt(k)$ mit $\otimes$, Symmetrie $V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$, Einsobjekt k

b) $nCob$ mit $\amalg$, Symmetrie $\Sigma_1 \amalg \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2 \amalg \Sigma_1$, Einsobjekt $\emptyset$

c) Sei R ein Ring. $Bimod(R)$ die Kategorie der Bimoduln über R mit Tensorprodukt $\otimes_R$, Einsobjekt R als Bimodul, im allgemeinen <u>nicht</u> symmetrisch!

Kurze Definition einer TQFT:

Eine n-dim. TQFT ist ein ~~Funktor~~ symmetrischer monoidaler Funktor

$$Z : (nCob, \amalg) \longrightarrow (Vekt(k), \otimes).$$

Die oben beschriebene Äquivalenz entspricht der nat. Äquivalenz von Funktoren.

Beispiel für eine zweidimensionale TQFT: