Sei $\Sigma$ eine glatte geschlossene $(n-1)$-dim. Mfkt., sei $\bar{\Sigma}$ die Mfkt. mit umgekehrter Orientierung.

$$(\Sigma \times I, i_0, i_1) : \Sigma \longrightarrow \Sigma$$

$$(\bar{\Sigma} \times I, j_1, j_0) : \bar{\Sigma} \longrightarrow \bar{\Sigma}$$

$$b = (\Sigma \times I, i_0 \amalg j_1, \emptyset) : \Sigma \amalg \bar{\Sigma} \longrightarrow \emptyset$$

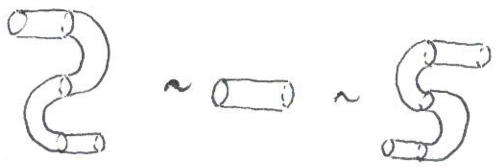
$$c = (\Sigma \times I, \emptyset, j_0 \amalg i_1) : \emptyset \longrightarrow \bar{\Sigma} \amalg \Sigma$$

Sei $V = Z(\Sigma)$, $W = Z(\bar{\Sigma})$. Wir erhalten lineare Abbildungen

$$\beta = Z(b) : V \otimes W \longrightarrow k$$

$$\gamma = Z(c) : k \longrightarrow W \otimes V$$

und die Relationen.



implizieren

$$\underbrace{(\beta \otimes id) \circ (id_V \otimes \gamma)}_{= id_V} : V = V \otimes k \longrightarrow V \otimes W \otimes V \longrightarrow k \otimes V = V \quad (*)$$

$$\underbrace{(id_W \otimes \beta) \circ (\gamma \otimes id_W)}_{= id_W} : W = k \otimes W \longrightarrow W \otimes V \otimes W \longrightarrow W$$

Lemma: Seien $V$ und $W$ $k$-Vektorräume. Sei $\beta : V \otimes W \longrightarrow k$ eine Paarung. Dann existiert $\gamma : k \longrightarrow W \otimes V$ mit der Eigenschaft $(*)$ genau dann, wenn $V$ endlich-dimensional ist und die induzierte Abb. $\bar{\beta} : V \longrightarrow W^*$ injektiv.

Beweis: Angenommen, $\gamma$ existiert. Setze $\gamma(1) = \sum_i w_i \otimes v_i$, dann folgt aus $(*)$

$$x = \sum_i \beta(x, w_i) v_i \Rightarrow V \text{ endlich-dimensional}$$

Sei $x \in V$ mit $\bar{\beta}(x) = 0 = \beta(x, \cdot)$. Dann ist insbesondere $\beta(x, w_i) = 0$ also $x = 0 \Rightarrow \bar{\beta}$ injektiv.

Sei jetzt $V$ endlich-dim. und $\bar{\beta}$ injektiv. Wähle Basis $v_i$ von $V$ und setze $\alpha_i = \bar{\beta}(v_i) \in W^*$

Die $\alpha_i$ sind lin. unabh. Betrachte

$$\alpha : W \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad w \longmapsto (\alpha_1(w), \dots \alpha_n(w)) \quad \text{mit } n = \dim V.$$

[ Angenommen $\alpha$ ist nicht surjektiv, dann ex. eine orth. Zerlegung

$$\mathbb{R}^n = \alpha(W) \oplus X \qquad \text{bzgl. des Standardskalarproduktes auf } \mathbb{R}^n$$

Wähle $x \in X$ mit $x = (x_1, \dots x_n) \neq 0$. Dann gilt

$$x_1 \cdot \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n = \langle x, \alpha(\cdot) \rangle = 0 \ ↯ \Rightarrow \alpha \text{ surjektiv.}$$

$\Rightarrow \exists$ Vektoren $w_i \in W$ mit $\alpha_i(w_j) = \delta_{ij} = \beta(v_i, w_j)$

Setze $\gamma(1) = \sum_i w_i \otimes v_i$. Dies erfüllt $(*)$

Wähle $\varphi \neq 0$ in $\mathrm{Ann}(\alpha(W))$. Dann gilt $\varphi(\alpha(\cdot)) = 0 = \sum \lambda_i \alpha_i$ ↯

$\dim(\mathrm{Ann}(\alpha(W))) = n - \dim(\alpha(W))$

Korollar: In einer TQFT $Z$ sind alle Vektorräume $Z(\Sigma)$ endlichdimensional.

Bemerkung: Schlecht für phys. Interpretation. Hier waren $Z(\Sigma) = L^2(X)$ Hilberträume unendlicher Dimension. Dies liegt an der Verwendung des algebraischen Tensorproduktes.

Ausweg: Betrachte andere Zielkategorien statt $\mathrm{Vekt}(K)$ wie $\mathrm{Hilb}$ oder $\mathrm{Ban}$.

Korollar: Ist $\beta : V \otimes W \longrightarrow K$ induziert von einer TQFT $Z$, dann ist $\beta$ nicht ausgeartet, folglich ist $Z(\bar{\Sigma}) \cong Z(\Sigma)^*$

Beweis: $\bar{\beta} : V \longrightarrow W^*$, $\tilde{\beta} : W \longrightarrow V^*$ sind beide injektiv $\Rightarrow \dim V = \dim W$.

TQFTs als monoidale Funktoren

Def: (monoidale Kategorie – siehe Zettel): ...

Beispiele:
a) $\mathrm{Vekt}(K)$ mit $\otimes$, Symmetrie $V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$, Einsobjekt $K$

b) $n\mathrm{Cob}$ mit $\amalg$, Symmetrie $\Sigma_1 \amalg \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2 \amalg \Sigma_1$, Einsobjekt $\phi$

c) Sei $R$ ein Ring, $\mathrm{Bimod}(R)$ die Kategorie der Bimoduln über $R$ mit Tensorprodukt $\otimes_R$, Einsobjekt: $R$ als Bimodul über sich selbst
im allgemeinen nicht symmetrisch

d) Sei $A$ eine Algebra über einem Körper $K$. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie, deren Objekte Endomorphismen von $A$ sind

$$ob(\mathcal{C}) = hom_A(A, A)$$

und deren Morphismen Intertwiner sind

$$hom(\rho, \sigma) = \{ x \in A \mid x \cdot \rho(a) = \sigma(a) \cdot x \}$$

Verknüpfung ist Multiplikation. Das Tensorprodukt auf Objekten ist die Verknüpfung von Endomorphismen und für zwei Intertwiner $x_1 \in hom(\rho_1, \sigma_1)$ $x_2 \in hom(\rho_2, \sigma_2)$ ist $x_1 \otimes x_2 = x_1 \rho_1(x_2) \in hom(\rho_1 \otimes \rho_2, \sigma_1 \otimes \sigma_2)$.

Dies ist eine strikte Tensorkategorie, die aber im allgemeinen nicht symmetrisch ist.

Problem: Die meisten monoidalen Kategorien sind nicht strikt.

Thm (MacLane): Jede monoidale Kategorie ist monoidal äquivalent zu einer strikten monoidalen Kategorie.

Thm (Kohärenzsatz von MacLane): Sei $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha, \lambda, \rho)$ eine monoidale Kategorie: Jedes Diagramm das aus $\alpha, \lambda, \rho$, Identitäten durch Kompositionen und Tensorprodukten gebildet werden kann, kommutiert.

**Def.:** Eine monoidale Kategorie oder TensorKategorie ist ein Tupel $(\mathcal{C}, \otimes, a, 1, \lambda, \rho)$ mit einer Kategorie $\mathcal{C}$, einem Funktor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, einer nat. Äquivalenz $a : \bullet \otimes (\bullet \otimes \bullet) \xleftrightarrow{\cong} (\bullet \otimes \bullet) \otimes \bullet$ (dem Assoziator), einem Einsobjekt $1 \in \mathcal{C}$ und ~~Iso~~ nat. Isomorphismen $\lambda_X : 1 \otimes X \xrightarrow{\cong} X$, $\rho_X : X \otimes 1 \longrightarrow X$ $\forall X \in Ob(X)$, die den folgenden Axiomen genügen.

1) das Pentagonaxiom:

$$\begin{tikzcd}
& ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "a_{W \otimes X, Y, Z}"'] \arrow[dr, "a_{W,X,Y} \otimes id_Z"] & \\
(W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "a_{W,X,Y \otimes Z}"] & \# & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "a_{W,X \otimes Y,Z}"] \\
W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[ll, leftrightarrow, "id_W \otimes a_{X,Y,Z}"']
\end{tikzcd}$$

2) das Einsaxiom

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes 1) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,1,Y}"] \arrow[dr, "\rho_X \otimes id_Y"'] & \# & X \otimes (1 \otimes Y) \arrow[dl, "id_X \otimes \lambda_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

Eine Tensorkategorie heißt strikt, falls $1 \otimes X = X$ und $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ und $\lambda_X = id_X$, $\rho_X = id_X$, $a_{X,Y,Z} = id_{X \otimes Y \otimes Z}$.

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ monoidale Kategorien. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißt monoidal, falls

$$F(X \otimes Y) = F(X) \otimes F(Y), \quad F(1_{\mathcal{C}}) = 1_{\mathcal{D}}, \quad F(a^{\mathcal{C}}) = a^{\mathcal{D}}, \quad F(\lambda^{\mathcal{C}}_X) = \lambda^{\mathcal{D}}_{F(X)}, \quad F(\rho^{\mathcal{C}}_X) = \rho^{\mathcal{D}}_{F(X)}.$$

Ein nat. Isomorphismus:

$$\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X \quad \text{für alle } X, Y \in Ob(\mathcal{C})$$

heißt Symmetrie von $\mathcal{C}$, falls $\sigma_{Y,X} \circ \sigma_{X,Y} = id_{X \otimes Y}$,

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes X \arrow[rr, "\sigma_{1,X}"] \arrow[dr, "\lambda_X"'] & \# & X \otimes 1 \arrow[dl, "\rho_X"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "\sigma_{X,Y} \otimes id_Z"] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\sigma_{X,Y \otimes Z}"] \arrow[d, phantom, "\#"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[d, "a_{Y,Z,X}"] \\
(Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "a_{Y,X,Z}"] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[r, "id_Y \otimes \sigma_{X,Z}"] & Y \otimes (Z \otimes X)
\end{tikzcd}$$

Def.: Eine n-dim. TQFT ist ein symmetrischer monoidaler Funktor

$$Z : (n\mathrm{Cob}, \amalg) \longrightarrow (\mathrm{Vekt}(k), \otimes).$$

Dies liefert auch einen Äquivalenzbegriff für TQFTs.

Übungsaufgabe

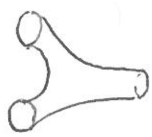
Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale Vektorraum $V$ eine 1-dim. TQFT $Z_V$ liefert.
Zeigen Sie, dass jede 1-dim. TQFT ~~zu~~ äquivalent zu einer der TQFTs $Z_V$ ist.

Klassifikation 2-dim. TQFTs

- Jede kompakte geschlossene 1-Mfkt. ist ~~die~~ diffeomorph zu einer disjunkten Vereinigung endlich vieler Kreise.
- Der Kreis besitzt einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus
$$S^1 \longrightarrow \overline{S^1} \quad \text{durch Reflektion.}$$

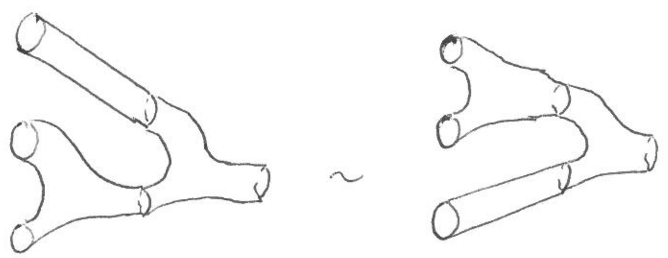
$\Rightarrow$ Die Vektorräume einer 2dim. TQFT sind durch $Z(S^1)$ bereits vollständig festgelegt: $A = Z(S^1)$

Betrachte die Kobordismen

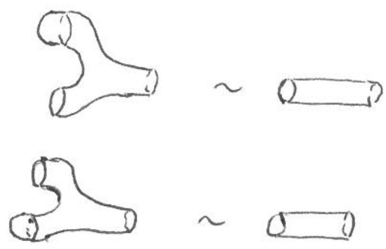
 und 

Diese induzieren Abbildungen

$$A \otimes A \longrightarrow A \quad \text{und} \quad k \longrightarrow A$$



und

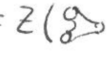
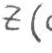


$$\Rightarrow \begin{tikzcd} A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, equal] \arrow[d] & (A \otimes A) \otimes A \arrow[d] \\ A \otimes A \arrow[d] & A \otimes A \arrow[dl] \\ A & \end{tikzcd}$$

Assoziativität

$$\begin{tikzcd} k \otimes A \arrow[r] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes k \arrow[r] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d] \\ & A \end{tikzcd}$$

Einsaxiome

$\Rightarrow$ $A$ ist eine assoziative Algebra mit Multiplikation $\mu = Z($$)$
und Eins $1 = Z($$)(1)$

Außerdem existiert der Kobordismus

 $\rightsquigarrow$ $Z($$) : A \longrightarrow k$ ist eine Linearform $\tau$ auf $A$

Wegen

ist die Paarung $a \otimes b \longmapsto \tau(a \cdot b) = \tau(\mu(a \otimes b))$ nicht ausgeartet.

Def.: Eine Frobeniusalgebra ist eine $k$-Algebra $A$ endlicher Dimension, ausgestattet mit einem Linearen Funktional $\tau : A \to k$, so dass $a \otimes b \mapsto \tau(a \cdot b)$ nicht ausgeartet ist.

Korollar: Jede zweidim. TQFT liefert eine Frobeniusalgebra $A = Z(S^1)$.