Topologische Quantenfeldtheorien

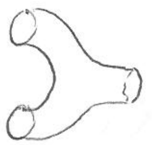
Klassifikation 2-dim. TQFTs

- Jede geschlossene kompakte 1-Mfkt. M ist diffeomorph zu $S^1 \sqcup \ldots \sqcup S^1$
- Der S^1 besitzt einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $S^1 \longrightarrow \overline{S^1}$ durch Reflektion.

$\Rightarrow$ Vektorräume einer 2-dim. TQFT Z sind durch $Z(S^1)$ bereits vollständig festgelegt:

Sei $A = Z(S^1)$.

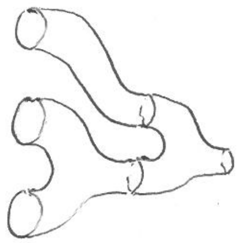
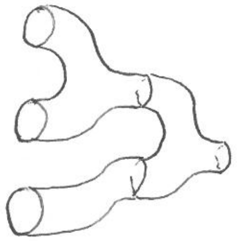
Betrachte die Kobordismen

 und 

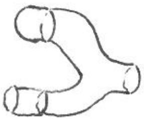
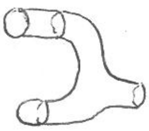
Diese induzieren Abbildungen:

$\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ und $\varepsilon : K \longrightarrow A$

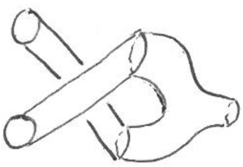
---

(1)  $\sim$  $\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "id \otimes \mu"] & (A \otimes A) \otimes A \arrow[d, "\mu \otimes id"] \\ A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \arrow[r, phantom, "\#"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

(2)  $\sim$  ;  $\sim$  $\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[r, "\varepsilon \otimes id"] \arrow[dr, "\lambda \otimes a \mapsto \lambda a"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes K \arrow[l, "id \otimes \varepsilon"'] \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$
$\#$ $\#$

(3)  $\sim$  $\rightsquigarrow$

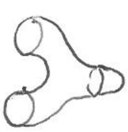
$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "x \otimes y \mapsto y \otimes x"] \arrow[dr, "\mu"'] & \arrow[d, phantom, "\#"] & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ A ist eine assoziative (1), kommutative (3) Algebra mit Multiplikation μ und Eins $1 = \varepsilon(1)$ (siehe (2)).

Betrachte den Kobordismus:

 $\rightsquigarrow$ $\tau : A \longrightarrow K$ ist eine Linearform auf der Algebra

Beachte:

 $\sim$ 

$\Rightarrow \beta : A \otimes A \longrightarrow K$

$\beta = \tau \circ \mu$ ist nicht ausgeartet, i.e. $\bar{\beta} : A \longrightarrow A^*$ ist bijektiv.

Def.: Eine <u>Frobeniusalgebra</u> A über einem Körper K ist eine endlich-dimensionale, unitale, assoziative Algebra über K ausgestattet mit einem linearen Funktional $\tau : A \to K$, so dass $a \otimes b \mapsto \tau(ab)$ nicht ausgeartet ist. ~~und x~~

<u>Korollar</u>: Jede 2-dim. TQFT liefert eine Frobeniusalgebra $A = Z(S^1)$, die kommutativ ist.

Sei A eine Frobeniusalgebra

Sei $\beta = \tau \circ \mu$. Da A endlich-dim. und $\bar{\beta} : A \to A^*$ injektiv ist, existiert

$$\gamma : K \longrightarrow A \otimes A \quad ; \quad 1 \longmapsto \sum e_i \otimes f_i \qquad \text{mit } \beta(f_i, e_j) = \delta_{ij}$$

Dann gilt: $$a = \sum_j \beta(a, e_j) f_j = \sum_j e_j \beta(f_j, a). \qquad (*)$$

Sei $\delta : A \longrightarrow A \otimes A$ gegeben durch $\delta(a) = \sum_i a e_i \otimes f_i$.

<u>Lemma</u>: $\sum_i a e_i \otimes f_i = \sum_i e_i \otimes f_i a$

<u>Beweis</u>:
$$\sum_i a e_i \otimes f_i = \sum_{i,j} e_j \,\tau(f_j a e_i) \otimes f_i = \sum_{i,j} e_j \otimes \tau(f_j a e_i) f_i = \sum_j e_j \otimes f_j a. \qquad \square$$

<u>Lemma</u>: δ ist koassoziativ, i.e. $(\delta \otimes id) \circ \delta = (id \otimes \delta) \circ \delta$

<u>Beweis</u>:
$$(\delta \otimes id)\left(\sum_i e_i \otimes f_i a\right) = \sum_{i,j} e_j \otimes f_j e_i \otimes f_i a = \sum_{i,j} e_j \otimes f_j a e_i \otimes f_i$$
$$(id \otimes \delta)\left(\sum a e_i \otimes f_i\right) = \sum_{i,j} a e_i \otimes f_i e_j \otimes f_j = \sum_{i,j} e_i \otimes f_i a e_j \otimes f_j. \qquad \square$$

<u>Theorem</u>: Eine endlich-dimensionale, unitale, assoziative K-Algebra A ist genau dann eine Frobeniusalgebra, falls A eine koassoziative, kounitale Koalgebra ist, so dass die Komultiplikation die Bedingung

$$(id \otimes \mu) \circ (\delta \otimes id) = \delta \circ \mu = (\mu \otimes id) \circ (id \otimes \delta) \qquad (F)$$

erfüllt.

<u>Beweis</u>: Sei A eine Frob.algebra, dann ist δ eine Komultiplikation mit Koeins $\tau : A \to K$ (siehe $(*)$). Koassoziativität haben wir im 2. Lemma geprüft. Die Bedingung (F) entspricht der Aussage des ersten Lemmas.

Sei A koassoziativ, kounital mit (F), dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
K \otimes A = A \arrow[r, "\varepsilon \otimes id"] \arrow[ddrr, bend right, "id"'] & A \otimes A \arrow[r, "\delta \otimes id"] \arrow[ddr, "\mu"] & A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id \otimes \mu"] & A \otimes A \arrow[r, "id \otimes \tau"] & A \otimes K = A \\
 & \# & \# & \# & \\
 & & A \arrow[uur, "\delta"] \arrow[uurr, bend right, "id"'] & &
\end{tikzcd}$$

somit ist $\delta \circ \varepsilon : K \longrightarrow A \otimes A$ eine Kopaarung zu $\beta = \tau \circ \mu$.

Daher ist β nicht ausgeartet.

$\square$

Bemerkung: Sei (A, τ) eine Frobeniusalgebra, dann ist die Komultiplikation eindeutig dadurch fixiert, dass τ eine Koeins sein soll und die Frobeniusbedingung (F) erfüllt ist.

Beispiele:

(1) Matrixalgebren mit $\tau: M_n(K) \longrightarrow K$
$T \longmapsto tr(T)$. nicht kommutativ

(2) Gruppenalgebren. Sei G eine endliche Gruppe, $A = KG$ mit $\tau: KG \longrightarrow K$
$\sum_{g \in G} \lambda_g g \longmapsto \lambda_e$

(3) Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Dann ist L eine Frobeniusalgebra über K.

(4) Sei M eine kompakte orientierte Mfkt. von Dimension n. Sei $H^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} H^k(M, \mathbb{R})$ die de Rham-Kohomologie. Algebra über $\mathbb{R}$ bzgl. $\wedge$. Poincaré-Dualität $\Rightarrow$ τ ist nicht ausgeartet.
Integration liefert τ.
↳ graduiert-kommutatives Beispiel.

Bemerkung: Frobeniusalgebren sind zwar Bialgebren, aber keine Hopfalgebren.
Hopfalgebra: Komultiplikation ist Algebrenhomomorphismus
Frob. algebra: Komultiplikation ist Modulhomomorphismus.

Normalform von Flächen

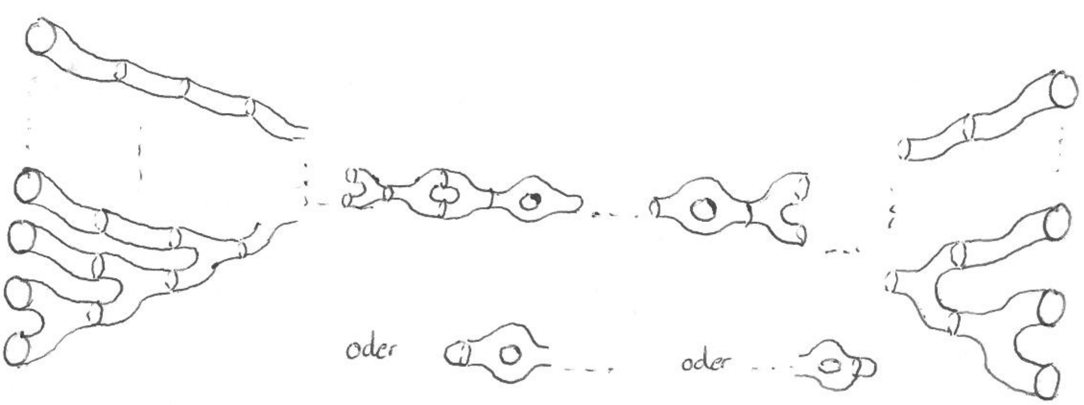
Klassifikationssatz für Flächen: Zwei zshgd., kompakte, or. Flächen ohne Rand sind diffeomorph genau dann, wenn sie dasselbe Geschlecht besitzen. Zwei zshgd., kompakte, or. Flächen mit orientierten Rändern sind diffeomorph genau dann, wenn sie dasselbe Geschlecht, dieselbe Anzahl an In-Boundaries und dieselbe Anzahl an Out-Boundaries besitzen.

Def.: Das Geschlecht einer Fläche Σ mit Rand ist definiert durch

$$g(\Sigma) = \frac{\dim H_1(\Sigma, \partial\Sigma; \mathbb{R}) - b}{2}$$

wobei b die Anzahl der Randkomponenten ist.

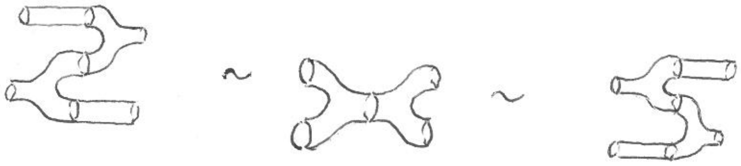
Korollar: Jede ~~Fläche~~ kompakte, zshgd., or. Fläche mit orientierten Rändern ist diffeomorph zu einer Fläche der Form:



Def.: Diese Fläche heißt Normalform von Σ.

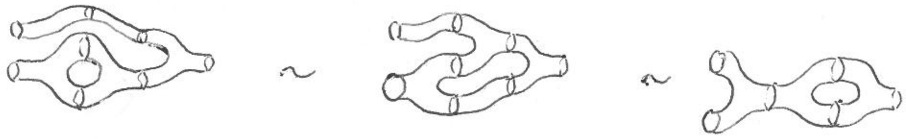
Welche Relationen werden benötigt, um die Verknüpfung zweier Normalformen wieder in Normalform zu bringen?

- Müssen nach links bewegen. Können dabei auf treffen. Benutze:



(F*)

- Müssen an vorbei bewegen. Benutze:



- Falls auf trifft, benutze: ~
- Benutze außerdem Identitäten: ~

Mit diesen Relationen und den gespiegelten Varianten lassen sich alle nach links und alle nach rechts bewegen.

~~Falls wir~~ Sei: A eine kommutative Frobeniusalgebra. Setze

$Z(\subset) = \varepsilon$, $Z(\supset) = \tau$, $Z(\text{⊰}) = \delta$, $Z(\text{⊱}) = \mu$, dann

entsprechen diese Bedingungen:

- (Ko-) Assoziativität
- Frobenius bedingung „$Z((F^*)) = (F)$"
- (Ko-) Eins.

Ein allgemeiner (nicht-zusammenhängender) Kobordismus lässt sich schreiben als

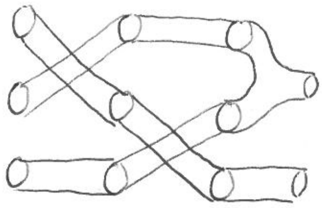
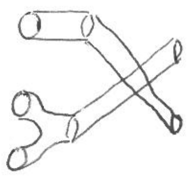
$P_1 \circ C \circ P_2$ wobei P_1 und P_2 durch Verknüpfung und ~~Tensor~~ disjunkte Vereinigung von  und entstehen (Permutations kobordismen)

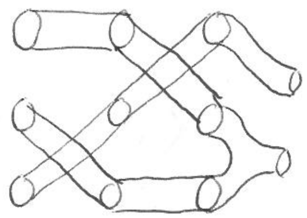
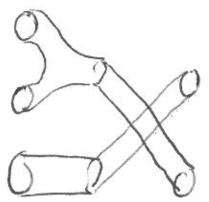
und C die disjunkte Vereinigung von zusammenhängenden Kobordismen ist.

merkung: $MCG(\Sigma)$ für $\Sigma = \underbrace{S^1 \sqcup \ldots \sqcup S^1}_{n \text{ Kopien}}$ ist S_n - die Permutationsgruppe auf n Elementen.

$$P_i = (\Sigma \times I)_{f_i} \quad \text{für } f_i \in MCG(\Sigma)$$

Relationen mit Twist

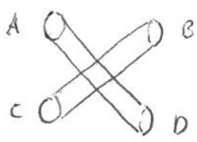
 ~  + Spiegelung

 ~  + Spiegelung

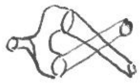
+ Relation der symmetrischen Gruppe

+ (Ko-) Kommutativität

Eliminieren der Twists

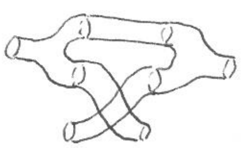
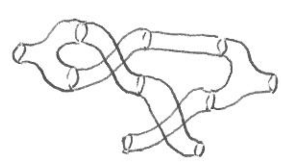
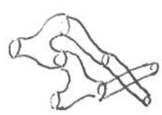


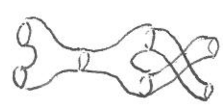
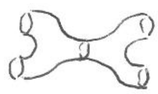
- Falls A und C verbunden. Per Induktion alles links von A und C ist in Normalform, dann ist

 = 

und wir können den Twist entfernen

- B und D verbunden. Analog.
- A und B verbunden. Können annehmen A und B in Normalform. Dann benutze

 ~  ~ 

~  ~ 

Thm: