Knoten und 3-Mannigfaltigkeiten

Seien M und N glatte, geschlossene, zusammenhängende und orientierte Mannigfaltigkeiten der Dimension n
Sei $m \in M$ und $n \in N$. Finde glatte Einbettungen $\underset{\text{or. erh.}}{\psi_M} : D^n \longrightarrow M$, $\underset{\text{or. umkehrend}}{\psi_N} : D^n \longrightarrow N$ mit $\psi_M(0) = m$, $\psi_N(0) = n$
(z.B. über tubulare Umgebungen). $M \setminus \psi_M(\mathring{D}^n)$ ist glatte Mfkt. mit Rand S^{n-1}, $N \setminus \psi_N(\mathring{D}^n)$ analog.

Def.: Sei $f_M = \psi_M|_{S^{n-1}}$, f_N analog. Die glatte orientierte Mannigfaltigkeit $M \underset{f_M S^{n-1} f_N}{\sqcup} N = M \# N$ heißt
die zusammenhängende Summe von M und N.

Je zwei Einbettungen $\psi_i : D^n \longrightarrow M$ $i \in \{1,2\}$ sind isotop.

Satz: Die zusammenhängende Summe ist eindeutig bis auf Diffeomorphie.

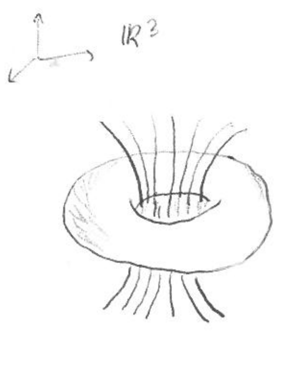
ACHTUNG: Orientierungen spielen eine Rolle $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2 \not\cong \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$.

Def.: Eine glatte Einbettung $S^1 \sqcup S^1 \sqcup \ldots \sqcup S^1 \longrightarrow M$ in eine geschlossene orientierbare 3-Mfkt M heißt Link in M.
Eine glatte Einbettung $S^1 \longrightarrow M$ heißt Knoten.
Zwei Knoten $K_1, K_2 : S^1 \longrightarrow M$ heißen äquivalent, falls sie ambient isotop sind, d.h. falls es eine Isotopie $H : M \times I \longrightarrow M$ gibt, so dass $H_0 = id$ und $H_1 \circ K_1 = K_2$.

Chirurgie entlang von Knoten

Idee: Erzeuge „neue" 3-Mannigfaltigkeiten aus anderen bereits bekannten 3-Mfkt. (z.B. S^3).
Betrachte glatte (geschlossene, orientierte) 3-Mfkt. M und Knoten $K : S^1 \longrightarrow M$. Aus tubularer Umgebung erhalten wir eine Einbettung $\psi : S^1 \times D^2 \longrightarrow M$. Setze $K = M \setminus \psi(S^1 \times \mathring{D}^2)$. Dies ist eine glatte geschlossene, orientierte Mfkt. mit Rand $\partial K \cong S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$. Wähle Diffeomorphismus $h : S^1 \times S^1 \longrightarrow \partial K$
Setze $Q_h = K \underset{h}{\sqcup} S^1 \times D^2$. Dies ist eine glatte geschlossene, or. 3-Mfkt.
Notation: Q_h entsteht durch Chirurgie am Knoten k aus M.
entlang des Knotens k.

Beispiele: • für $h = \psi|_{S^1 \times S^1} \rightsquigarrow Q \cong M$
↳ nützliches Bild ~~hier~~ zu $M = S^3$



$$S^3 \cong \partial(D^4) \cong \partial(D^2 \times D^2) \cong S^1 \times D^2 \cup D^2 \times S^1$$

$$S^3 \cong \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$$

für $h: S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$; $(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) \longmapsto (e^{i\varphi}, e^{-i\varphi})$ und $M = S^3$

$$(S^1 \times D^2) \amalg_h (D^2 \times S^1) \cong S^1 \times (D^2 \amalg_{S^1} D^2) \cong S^1 \times S^2.$$

Bemerkung: Ist h_1 isotop zu h_2, dann ist $Q_{h_1} \cong Q_{h_2}$.

Was ist $MCG_+(\mathbb{T}^2)$?

Jeder Diffeomorphismus $f: \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ induziert eine Abbildung $f_*: H_1(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H_1(\mathbb{T}^2)$.

Wähle Basis $\alpha, \beta \in H_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2$. Dann ist $f_* \in GL_2(\mathbb{Z})$.

Da f die Orientierung erhalten soll gilt sogar $f_* \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Ist f isotop zu f' (und damit insbesondere homotop), dann gilt $f_* = f'_*$

$\Rightarrow \Phi: MCG_+(\mathbb{T}^2) \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z})$ ist ein wohl definierter Gruppenhomomorphismus

Lemma: Φ ist surjektiv.

Beweis: $SL_2(\mathbb{Z})$ wird erzeugt von $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T_2$

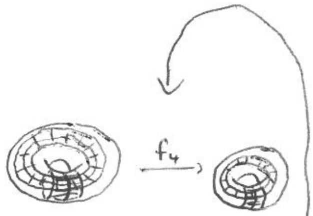
Das Element $[f_1]$ mit $f_1: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$; $(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) \longmapsto (e^{i\psi}, e^{-i\varphi})$ wird auf T_1 abgebildet,

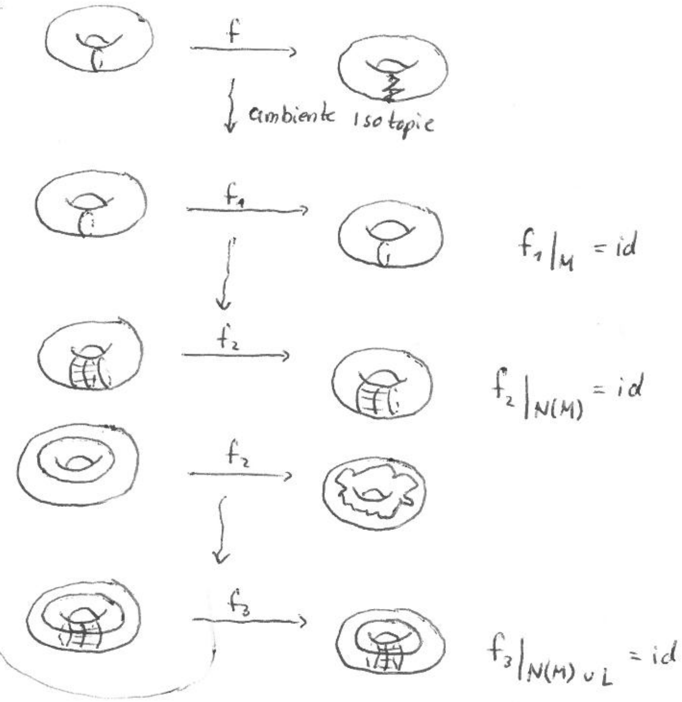
Das Element $[f_2]$ mit $f_2: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$; ~~$(e^{i\varphi}, e^{i\psi})$~~ $(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) \longmapsto (e^{i(\varphi+\psi)}, e^{i\psi})$ auf T_2. □

Dehn twist

Lemma: Φ ist auch injektiv.

Beweisskizze: Wähle Meridian auf $\mathbb{T}^2$
M





Rest ist Abbildung $f_4: D^2 \longrightarrow D^2$ mit $f_4|_{S^1} = id$

Übungsaufgabe: Jeder ~~Abbildung~~ Homöomorphismus $f: D^2 \longrightarrow D^2$, der die Identität auf dem Rand ist, ist isotop zur Identität

(Alexander-Trick)

<u>Lemma</u>: $MCG_+(S^2)$ ist trivial.

<u>Beweis</u>: Jeder Diffeomorphismus $f: S^2 \longrightarrow S^2$ ist isotop zu einem Diffeomorphismus, der einen Punkt $x_0 \in S^2$ fixiert, da $SO(3)$ zusammenhängend ist und transitiv auf S^2 operiert.

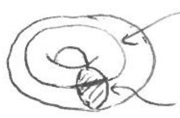
$$\exists\ \hat{f} : D^2 \longrightarrow D^2 \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ccc} D^2 & \xrightarrow{\hat{f}} & D^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^2/_{S^1} \cong S^2 & \xrightarrow{f} & S^2 \end{array}$$

Verwende Alexander-Trick. □

Sei M glatte, geschlossene, orientierte 3-Mfkt. und $k: S^1 \longrightarrow M$ ein Knoten.
Seien K, h und Q_h wie oben.

<u>Thm.</u> (Moise): Every topological mfd. M of dim ≤ 3 admits a smooth structure. Falls N homöomorph zu M ist, dann ist N auch diffeomorph zu M. Insbesondere ist die glatte Struktur auf M bis auf Diffeomorphie eindeutig.

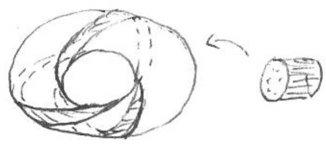
- Q_h entsteht aus M durch Einkleben eines Volltorus $S^1 \times D^2$:



- Der Diffeomorphietyp ist durch $[h] \in MCG_+(\mathbb{T}^2) \cong SL_2(\mathbb{Z})$ bereits festgelegt.
- Tatsächlich reicht das Bild des Meridians, um den Homöomorphietyp / Diffeomorphietyp von Q_h zu fixieren. $\alpha: S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$, $z \longmapsto (1, z)$ $\quad h_*(\alpha_*([S^1])) \in \mathbb{Z}^2$

<u>Beweis</u>: Sei $J \subset S^1$ ein abgeschlossener Kreisbogen, der eine Umgebung von $1 \in S^1$ ist.

Klebe $Q' = K \amalg_{h|_{J\times D^2}} (J \times D^2)$



$Q' \amalg_{h} ((S^1 \setminus \mathring{J}) \times D^2) = Q_h$

aber $S^1 \setminus \mathring{J} \times D^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{homöomorph}}}{\cong} D^3$, d.h. $Q_h = Q' \amalg_{\varphi} D^3$ wobei $\varphi: S^2 \longrightarrow \partial Q'$ ein Homöomorphismus.

Da $MCG_+(S^2)$ trivial ist, ist der Homöomorphietyp von Q_h durch Q' festgelegt. □

Betrachte wieder $M = S^3$, $k: S^1 \longrightarrow M$ ein Knoten. K das Knotenkomplement.

Basis von $H_1(\partial K)$ kanonisch gegeben durch Meridian m_K: $\psi(\{1\} \times \partial D^2) \subset \partial K$ (bis auf Orientierung; ψ tub. Umg. von k)

und Longitude ℓ_K: $H_1(\partial K) \longrightarrow H_1(K)$ hat 1-dim Kern, wähle Generator

<u>Def.</u>: Eine Chirurgie entlang von k mittels $h: S^1 \times S^1 \longrightarrow \partial K$ heißt <u>integral</u>, falls

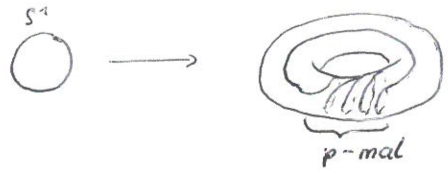
$$h_*(m) = p m_K \pm \ell_K.$$

ansonsten heißt sie <u>rational</u>. Der Diffeomorphietyp von Q_h ist durch $h_*(m) = p m_K + q \ell_K$ bzw. durch $\frac{p}{q}$ vollständig fixiert.

$(\frac{1}{0} = \infty)$

Framings / Rahmungen

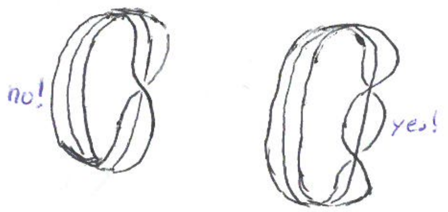
Bild zu $h_*(m) = p \cdot m_K \pm \ell_K$



Idee, um p mit in die Knotendaten aufzunehmen:

Betrachte gerahmte Links.

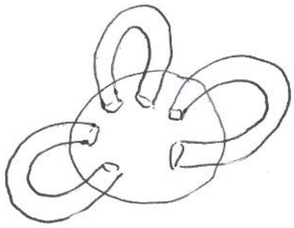
<u>Def.</u>: Ein gerahmter Knoten ist die glatte Einbettung eines <u>(verdrillten) Streifens</u> in M.
Ein verdrillter Streifen ist das Diskbündel eines ~~Vektorbündels~~ Geradenbündels über S^1.



- gerahmter Knoten in S^3 liefert integrale Chirurgie

Heegaard splitting

<u>Def.</u>: Ein <u>Hantelkörper</u> (handle body) ist eine orientierbare 3-Mfkt. mit Rand, die homöomorph zum ~~folgenden~~ H_g ist, wobei H_g die 3-Mfkt. ist, die aus D^3 durch Ankleben von g Kopien von 1-Henkeln $D^2 \times [-1, 1]$ entsteht. Die Verklebungshomöomorphismen identifizieren die 2g Scheiben $D^2 \times \{\pm 1\}$ mit 2g disjunkten Scheiben in $\partial D^3 = S^2$. ~~so dass~~ ~~die e~~



g heißt auch <u>Geschlecht</u> des Hantelkörpers

<u>Def.</u>: Eine Zerlegung einer geschlossenen or.baren 3-Mfkt. M in $H \cup H'$ mit zwei Hantelkörpern H und H' so, dass $H \cap H' = \partial H = \partial H'$ heißt <u>Heegaard splitting</u> von M.

<u>Thm</u>: Jede geschlossene, orientierbare 3-Mfkt. M besitzt ein <u>Heegaard splitting</u>