Topologische Quantenfeldtheorien

 23.11.2011

(1)

Sei $k: S^1 \to S^3$ ein Knoten, K das Knotenkomplement, $\psi: S^1 \times D^2 \to S^3$ die zugehörige tubulare Umgebung.

Basis von $H_1(\partial K)$ kanonisch gegeben durch
bis auf Orientierung

Meridian m_K: $\psi(\{1\} \times \partial D^2) \subset \partial K$ liefert Klasse $[\psi(\{1\} \times \partial D^2)] \in H_1(\partial K) \cong \pi_1(\partial K)$

Longitudinale ℓ_K: $H_1(\partial K; \mathbb{Z}) \to H_1(K; \mathbb{Z})$ hat 1-dim. Kern. Wähle Generator.

Fixiere Orientierungen folgendermaßen:

- S^3 erbt Standardorientierung von $\mathbb{R}^4$
- K erhält Orientierung als 3-dim UMfkt. von S^3
- K induziert Orientierung von ∂K
- Wähle Durchlaufrichtung von m_K und ℓ_K so, dass Tangentialvektoren von m_K und ℓ_K am Schnittpunkt positive Basis formen.

Definition: Eine Chirurgie entlang von k mittels $h: S^1 \times S^1 \to \partial K$ heißt integral, falls

$$h_*(m) = p \cdot m_K \pm \ell_K$$

ansonsten heißt sie rational.

Bild von m unter h:

p Windungen

- p ist die Verschlingungszahl (linking number) von k und $h(m)$

Idee, um p mit in die Daten aufzunehmen: Betrachte gerahmte Knoten.

Def.: Ein gerahmter Link mit n Strängen in einer 3-Mfkt. M ist eine Einbettung $\ell: \underbrace{S^1\times I \sqcup \dots \sqcup S^1 \times I}_{n\text{-mal}} \to M$.

Ein gerahmter Knoten ist ein gerahmter Link mit nur einem Strang.

gerahmter Knoten $k: S^1 \times I \to M$
liefert Linking number $\ell k(k(z,0), k(z,1))$

Heegaard splitting

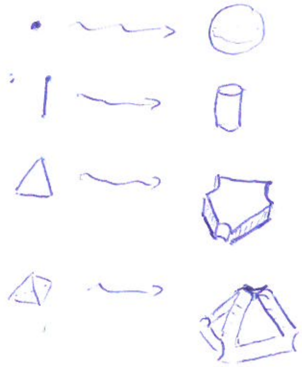
Def.: Ein Henkelkörper (handlebody) ist eine orientierbare 3-Mfkt. mit Rand, die homöomorph zu H_g ist, wobei H_g die 3-Mfkt. ist, die aus D^3 durch Ankleben von g Kopien von 1-Henkeln $D^2 \times [-1,1]$ entsteht. Die Verklebungshomöomorphismen identifizieren dabei die $2g$ Scheiben $D^2 \times \{\pm 1\}$ mit $2g$ disjunkten Scheiben in $\partial D^3 = S^2$. g heißt auch Geschlecht des Henkelkörpers

Def.: Eine Zerlegung einer geschlossenen or. baren 3-Mfkt. M in $H \cup H'$ mit zwei Henkelkörpern H und H' so, dass $H \cap H' = \partial H = \partial H'$ heißt Heegard splitting von M. Das Geschlecht von H bzw. H' heißt Geschlecht des Heegaard splittings. ~~(orientierungs umkehrend)~~

Satz: Jede geschlossene, orientierbare 3-Mfkt. besitzt ein Heegaard splitting.

Beweisskizze: Nach einem Satz von Moise ist jede 3-Mfkt. triangulierbar. Wähle eine Triangulierung T.

Ersetze: Vertices durch Bälle D^3 ;
Kanten durch Zylinder $D^2 \times I$:
Seiten der Tetraeder durch Platten :
Tetraeder durch deformierte Bälle :



V = Menge aller Bälle

Z

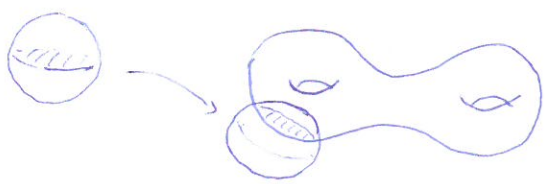
P

D

$H(T) = V \cup Z$
$H'(T) = P \cup D$ beides Henkelkörper

$H(T) \cup H'(T) \cong M.$ $\square$

Sei M eine 3-Mfkt. und $H \cup H'$ ein Heegaard splitting von M vom Geschlecht g. Sei $V \subset S^3$ der Standardtorus. $S^3 = V \cup V'$ das zugehörige Heegaard splitting. Wähle Einbettung: $f_1 : D^3 \longrightarrow M$, so dass f_1 die äquatoriale $D^2 \subset D^3$ nach ∂H einbettet.

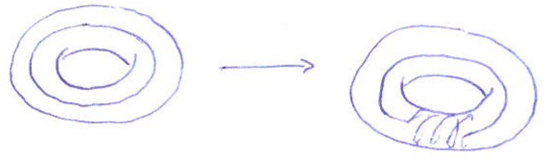


Wähle Einbettung $f_2 : D^3 \longrightarrow S^3$, so dass f_2 die äquatoriale D^2 in ∂V ein-bettet. Bilde jetzt $M \# S^3$ mit diesen Einbettungen. Dann ist $H \# V \cup H' \# V' = M \# S^3 \cong M$ ein weiteres Heegaard splitting der ~~Dimension~~ Geschlechts $g+1$. Diese Konstruktion heißt Stabilisierung des Heegaard splittings.

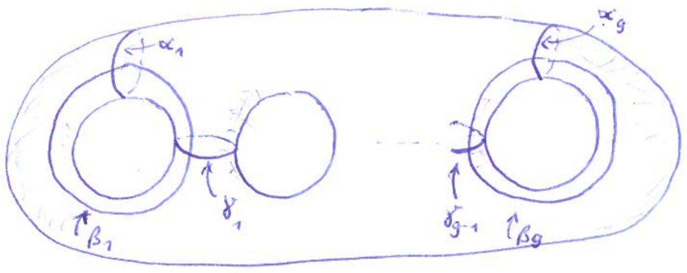
Betrachte jetzt etwas allgemeinere Zerlegung: Homöomorphismus $f : M \longrightarrow H \cup_h H'$ mit orientierungsumkehrendem Homöomorphismus $h : \partial H \longrightarrow \partial H'$.

$\rightsquigarrow$ Müssen stetige Abbildungsklassengruppe $MCG^{0,+}(\Sigma) = \mathrm{Homeo}(\Sigma) / \mathrm{Homeo}_0(\Sigma)$ für eine Fläche Σ verstehen.

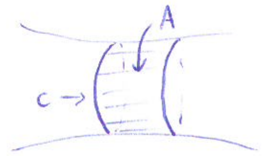
Zur Erinnerung: Dehn twist isotop zu



... ist auch sinnvoll für allgemeinere Flächen Σ. Betrachte



• Sei c eine der Kurven α_i, β_i oder γ_i.
Wähle tub. Umgebung $N(c) \subset \Sigma$ ~~so dass~~
und „Schlauch“ A um c, $A \subset N(c)$ so dass
c eine Randkomponente ist

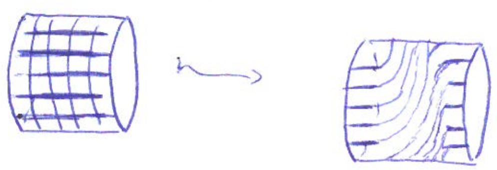


Identifiziere A mit

$A' = \{ z \mid 1 \leq |z| \leq 2 \} \subset \mathbb{C}$

Betrachte

$\tau_c' : A' \longrightarrow A'$; $re^{i\phi} \longmapsto re^{i(\phi + 2\pi(r-1))}$



Diese Abbildung induziert nach Fortsetzung durch die Identität einen Homöomorphismus

$\tau_c : \Sigma \longrightarrow \Sigma$

Die Klasse von τ_c in $MCG^{0,+}(\Sigma)$ ist unabhängig von den getroffenen Wahlen.

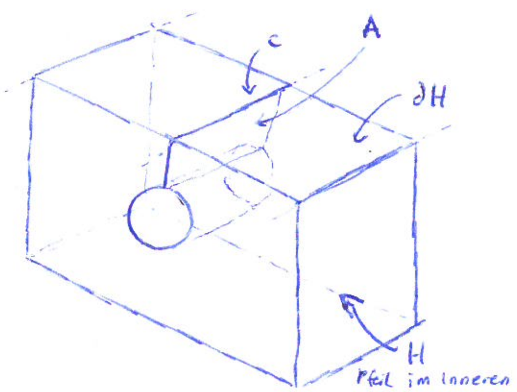
<u>Def.</u>: τ_c heißt <u>Dehn twist</u> entlang von c.

<u>Satz</u> (Lickorish Twist Theorem): Sei Σ eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht g. Die Gruppe $MCG^{0,+}(\Sigma)$ wird erzeugt von Dehntwists entlang der Kurven $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ mit $1 \leq i,j \leq g$, $1 \leq k \leq g-1$.

<u>Lemma</u>: Seien $h_1, h_2 : \partial H \longrightarrow \partial H'$ Homöomorphismen der Ränder zweier Henkelkörper H und H' so dass $h_1 = h_2 \circ \tau_c$ für einen Dehn twist τ_c*. Dann entsteht die Mannigfaltigkeit $M_2 = H \#_{h_2} H'$ aus der Mannigfaltigkeit $M_1 = H \#_{h_1} H'$ durch Chirurgie an einem gerahmten Knoten $k \subset M_1$ isotop zum Bild von c.

* entlang einer Kurve $c \subset \partial H$

Beweisskizze: Wähle Kragen von ∂H und benutze diesen, um die Kurve c in H hineinzuverschieben. Erhalte einen Knoten $k \subset H$. Sei $N(k)$ eine tubulare Umgebung von k und $A \cong S^1 \times I$ der Zylinder, der c mit $\partial N(k)$ verbindet.



Sei $\varphi : H \setminus N(k) \longrightarrow H \setminus N(k)$ der Homöomorphismus, der $H \setminus N(k)$ entlang von A aufschneidet, eine der beiden entstehenden Flächen um 360° in Richtung c dreht und die beiden Flächen an A wieder zusammenklebt.

$\varphi|_{\partial H} = \tau_c$ und $\varphi|_{\partial N(k)}$ ist Twist entlang der Longitude $\ell = A \cap N(k)$.

Sei $M_i' = (H \setminus N(k)) \cup_{h_i} H'$, dann definiert

$$\Phi : M_2' \longrightarrow M_1' \ , \quad x \longmapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{falls } x \in H \setminus N(k) \\ x & \text{falls } x \in H' \end{cases}$$

einen Homöomorphismus, da $h_1 = h_2 \circ \tau_c$.

$\Rightarrow$ M_2 entsteht aus M_1 durch Chirurgie am ~~ge~~ Knoten k

Φ bildet den Meridian m des Torus $\partial N(k)$ auf die Kurve

ab, daher kann der Knoten gerahmt werden. □

Satz (Lickorish und Wallace): Jede geschlossene orientierbare 3-Mfkt. M entsteht durch Chirurgie entlang eines gerahmten Links in S^3.

Beweis: ~~M kann darges~~ M ist homöomorph zu $H \#_{h_2} H'$ für zwei Henkelkörper H und H' vom Geschlecht g und einen orientierungsumkehrenden Homöomorphismus $h_2 : \partial H \longrightarrow \partial H'$. Analog ist $S^3 \cong H \#_{h_1} H'$, denn S^3 hat ein Heegaard splitting beliebigen Geschlechts. $h_2^{-1} \circ h_1$ ist orientierungserhaltender Homöomorphismus. Nach Lickorisch-Twist-Satz ist $h_2^{-1} \circ h_1$ isotop zu $\tau_{c_1} \circ \tau_{c_2} \circ \dots \circ \tau_{c_n}$.

$\Rightarrow$ h_1 ist isotop zu $h_2 \circ \tau_{c_1} \circ \dots \circ \tau_{c_n}$.

$\Rightarrow$ Nach dem Lemma entsteht M durch eine Sequenz von Chirurgien entlang von gerahmten Knoten aus S^3. Dies entspricht einer Chirurgie an einem gerahmten Link.

□