Satz (Lickorish und Wallace): Jede geschlossene or. bare 3-Mfkt. M entsteht durch Chirurgie entlang eines gerahmten Links in S^3.

- M hängt nur von der Isotopie Klasse des Links ab. (ambiente Isotopie)

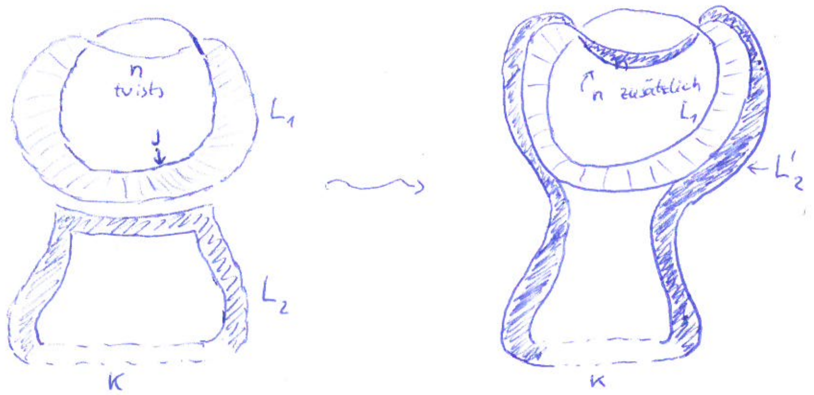
- auch nicht isotope Links können zu homöomorphen / diffeomorphen Mfkt.en führen.

Beispiel:

Chirurgie an diesem gerahmten Knoten in S^3 führt auf den „Linsenraum" $L(1,1) = S^3$

$\Rightarrow$ Chirurgie an L und an $L \cup \{O^{\pm 1}\}$ liefern diffeomorphe 3-Mfkt.

Betrachte folgende Situation:



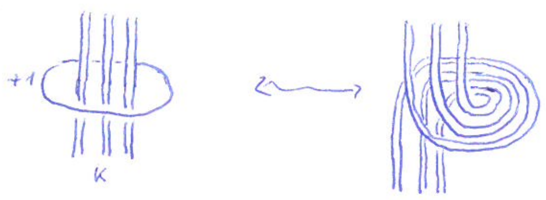
- beide Links führen auf homöomorphe und damit auch diffeomorphe Mfkten., denn

Rand dieser Scheibe D^2 wird auf J abgebildet

im Resultat der Chirurgie kann L_2' erst über den Knoten, dann über D^2 gezogen werden. NACH der Chirurgie an L_1 sind L_2 und L_2' isotop.

Satz von Kirby: im wesentlichen bestimmen diese zwei Beispiele den allgemeinen Fall. $\rightsquigarrow$ Kirby moves

Satz: Seien L und L' zwei gerahmte Links in einer geschl. or. baren 3-Mfkt. M. Seien M_L und $M_{L'}$ die Resultate der Chirurgie an L bzw. L'. Dann gilt $M_L \cong M_{L'}$ genau dann, wenn L' aus L durch eine Sequenz von Kirby-Fenn-Rourke Bewegungen entsteht.



and similarly for -1.

$k = 0$ möglich!

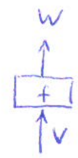
Um Invarianten von 3-Mfkten zu finden, müssen wir also Invarianten von gerahmten Links erzeugen (insbesondere Knoteninvarianten), die auch unter den Fenn-Rourke Bewegungen invariant sind.

Idee: Verwende graphischen Kalkül von Tensorkategorien.

Graphischer Kalkül (Penrose)

Sei $(\mathcal{C}, \otimes, \ldots)$ eine monoidale Kategorie.

Morphismus: $f : V \longrightarrow W \rightsquigarrow$

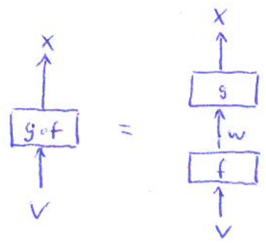


$id : V \longrightarrow V \rightsquigarrow$

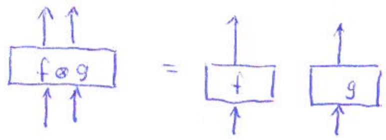
$f : V \longrightarrow W$

$g : W \to X$

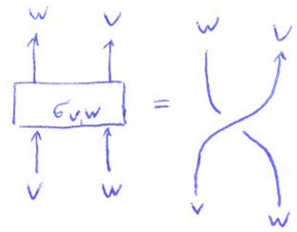
$g \circ f : V \to X \rightsquigarrow$

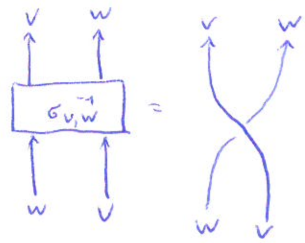


$f \otimes g \longrightarrow$



Falls $\mathcal{C}$ eine verzopfte monoidale Kategorie ist, d.h. ein Braiding besitzt, dann zeichnen wir dies





<u>Def.</u>: Sei $\mathcal{C}$ eine monoidale Kategorie und V ein Objekt in $\mathcal{C}$. Ein Objekt V^* heißt Rechtsdual von V, zusammen mit Morphismen

$e_V : V^* \otimes V \longrightarrow \mathbb{1}$

$i_V : \mathbb{1} \longrightarrow V \otimes V^*$

falls gilt:

$$\underbrace{V \xrightarrow{i_V \otimes id_V} V \otimes V^* \otimes V \xrightarrow{id_V \otimes e_V} V}_{= id_V}$$

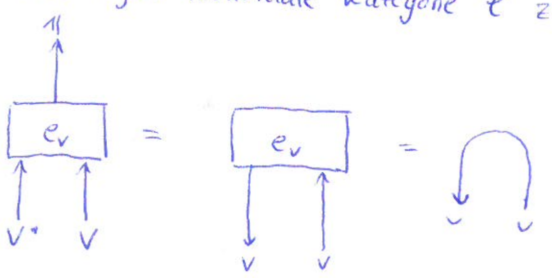
und

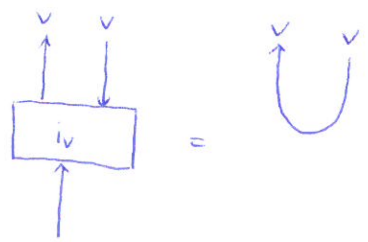
$$\underbrace{V^* \xrightarrow{id_{V^*} \otimes i_V} V^* \otimes V \otimes V^* \xrightarrow{e_V \otimes id_{V^*}} V^*}_{= id_{V^*}}$$

(Linksdual ${}^*V$ mit $e_V' : V \otimes {}^*V \longrightarrow \mathbb{1}$ und $i_V' : \mathbb{1} \longrightarrow {}^*V \otimes V$)

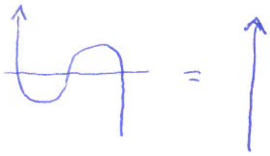
Eine monoidale Kategorie heißt <u>rigide</u> (oder autonom), falls jedes Objekt $V \in ob(\mathcal{C})$ ein Links- und ein Rechtsdual besitzt.

Für eine rigide monoidale Kategorie $\mathcal{C}$ zeichnen wir

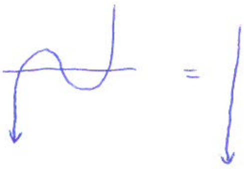




In diesem Bild:



und



<u>Lemma</u>: Das Rechtsdual ist eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus, der kompatibel mit e und i ist.

<u>Beweis</u>: Setze $\varphi : V_{(1)}^* \xrightarrow{id \otimes i_{(2)}} V_{(1)}^* \otimes V \otimes V_{(2)}^* \xrightarrow{e_{(1)} \otimes id} V_{(2)}^*$

$\psi : V_{(2)}^* \xrightarrow{id \otimes i_{(1)}} V_{(2)}^* \otimes V \otimes V_{(1)}^* \xrightarrow{e_{(2)} \otimes id} V_{(1)}^*$

$\varphi =$  $\psi =$  mit 

Eindeutigkeit:

$$\begin{tikzcd}
V_{(1)}^* \arrow[r, "id \otimes i_{(2)}"] \arrow[d, "\varphi'"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & V_{(1)}^* \otimes V \otimes V_{(2)}^* \arrow[r, "e_{(1)} \otimes id"] \arrow[d, "\varphi' \otimes id"] & V_{(2)} \\
V_{(2)}^* \arrow[r, "id \otimes i_{(2)}"] \arrow[rru, bend right, "id_{V_{(2)}^*}"'] & V_{(2)}^* \otimes V \otimes V_{(2)}^* \arrow[ru, "e_{(2)} \otimes id"'] &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \varphi = \varphi'$.

□

<u>Lemma</u>: Es gilt

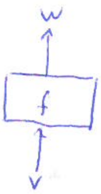
<u>Beweis</u>: folgt aus

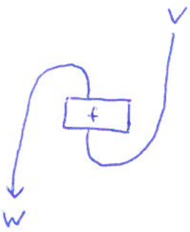
$$\begin{tikzcd}
V \otimes W^* \otimes W \arrow[r, "\sigma_{V, W^* \otimes W}"] \arrow[d, "id \otimes e_W"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & W^* \otimes W \otimes V \arrow[d, "e_W \otimes id"] \\
V \otimes 1\!\!1 \arrow[r, "\sigma_{V, 1\!\!1}"] & 1\!\!1 \otimes V
\end{tikzcd}$$

□

In einer rigiden monoidalen Kategorie $\mathcal{C}$ lassen sich duale oder adjungierte Morphismen definieren

$f : V \longrightarrow W \quad \rightsquigarrow \quad f^* : W^* \longrightarrow V^*$





$= \quad W^* \xrightarrow{id \otimes i_V} W^* \otimes V \otimes V^* \xrightarrow{id \otimes f \otimes id} W^* \otimes W \otimes V^* \xrightarrow{e_W \otimes id_{V^*}} V^*.$

Dies definiert einen Isomorphismus:

$\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathrm{Hom}(W^*, W^*)$

Übungsaufgabe: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}(U, W \otimes V^*)$

$\mathrm{Hom}(U, V \otimes W) \cong \mathrm{Hom}(V^* \otimes U, W)$

Def.: Sei $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha, \ldots)$ eine monoidale Tensorkategorie.

Ein natürlicher Isomorphismus $\sigma_{V,W} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ heißt <u>Braiding</u> (oder Verzopfung) falls folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \arrow[r, "\sigma_{1,23}"] & (V_2 \otimes V_3) \otimes V_1 \arrow[dr, "\alpha_{2,3,1}"] & \\
(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \arrow[ur, "\alpha_{1,2,3}"] \arrow[dr, "\sigma_{1,2} \otimes id"'] & \arrow[r, phantom, "\#"] & & V_2 \otimes (V_3 \otimes V_1) \\
 & (V_2 \otimes V_1) \otimes V_3 \arrow[r, "\alpha_{2,1,3}"'] & V_2 \otimes (V_1 \otimes V_3) \arrow[ur, "id_{V_2} \otimes \sigma_{1,3}"'] &
\end{tikzcd}$$

und das entsprechende Diagramm mit σ^{-1}.