Topologische Quantenfeldtheorien

Mehr zu rigiden monoidalen Kategorien:

Eigenschaften der Duale:

(i) $\mathbb{1}^* \cong \mathbb{1} \cong {}^*\mathbb{1}$

(ii) Das Tripel bestehend aus

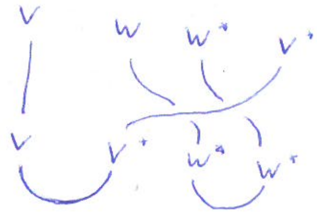
$W^* \otimes V^*$

$(e_V \otimes e_W) \circ (\sigma^{-1}_{W^*, V^* \otimes V} \otimes id)$

$(id \otimes \sigma_{V^*, W \otimes W^*}) \circ i_V \otimes i_W$

ist ein Rechtsdual zu $V \otimes W$ (ebenso mit $\sigma^{-1} \leftrightarrow \sigma$)

Bild zu i:



(iii) $(\sigma_{VW})^* = \sigma_{V^* W^*}$

(iv) ${}^*(V^*) \cong ({}^*V)^* \cong V$

Def.: ~~Eine Kategorie $\mathcal{C}$~~ Eine rigide, monoidale, gezopfte Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Bandkategorie (ribbon category), falls natürliche Isomorphismen

$$\delta_V : V \longrightarrow V^{**}$$

existieren, für die folgendes gilt:

1) $\delta_{V \otimes W} = \delta_V \otimes \delta_W$

2) $\delta_{\mathbb{1}} = id$

3) $\delta_{V^*} = (\delta_V^*)^{-1}$

Sei $\psi_V : V^{**} \longrightarrow V$ der folgende Isomorphismus

$$V^{**} \xrightarrow{i_V \otimes id} V \otimes V^* \otimes V^{**} \xrightarrow{id \otimes \sigma^{-1}} V \otimes V^{**} \otimes V^* \xrightarrow{id \otimes e_{V^*}} V$$

Lemma: In jeder rigiden, gezopften monoidalen Kategorie $\mathcal{C}$ gilt:

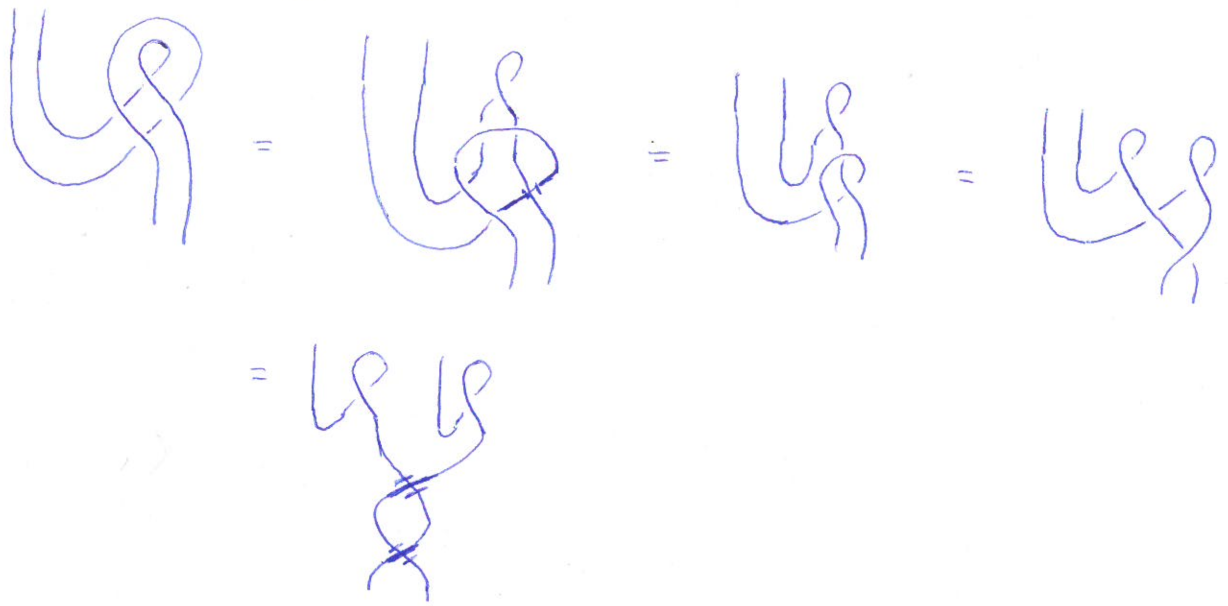
a) $\psi_{V \otimes W} = \sigma_{W,V}\, \sigma_{V,W}\, (\psi_V \otimes \psi_W)$

b) $\psi_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$.

~~Skizze~~ Falls $\mathcal{C}$ eine Bandkategorie ist, gilt auch: $\psi_{V^*} = \delta_V^*\, \psi_V^*\, \delta_V^*$

Skizze zum Beweis von a):

$\Psi_V \rightsquigarrow$ 



Def.: $\Theta_V = \Psi_V \circ \delta_V$ heißt Twist von V in $\mathcal{C}$.

Korollar aus Lemma: Θ_V erfüllt:

a) $\Theta_{V\otimes W} = \sigma_{W,V} \circ \sigma_{V,W}(\Theta_V \otimes \Theta_W)$

b) $\Theta_{\mathbb{1}} = id$

c) $\Theta_{V^*} = (\Theta_V)^*$

Bemerkung: •) Θ legt δ eindeutig fest.

•) $\Theta_V = id_V \ \forall V \in ob(\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{C}$ symmetrisch.

~~Im allgemeinen gilt also $\Theta_V \neq id_V$ in einer~~

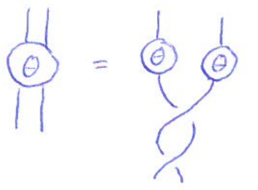
In einer echten gezopften monoidalen Kategorie gilt also $\Theta_V \neq id_V$.

Das Diagramm  ist isotop zu , aber $\Theta_V \neq id_V$

Ausweg: Nehme Bänder statt Knoten!

 ist nicht isotop zu  sondern zu  ← Twist

Dies erklärt den Namen Bandkategorie.

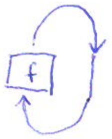
obige Identität: 

Spur in Band Kategorien

Def.: Sei V ein Objekt in einer Band Kategorie $\mathcal{C}$ und $f \in End(V)$, dann ist $tr(f) \in End(\mathbb{1})$ der Morphismus

$$\mathbb{1} \xrightarrow{i_V} V \otimes V^* \xrightarrow{f \otimes id} V \otimes V^* \xrightarrow{\delta_V \otimes id} V^{**} \otimes V^* \xrightarrow{e_{V^*}} \mathbb{1}$$

Bild:



Außerdem definieren wir

$$\dim V = tr(id_V)$$

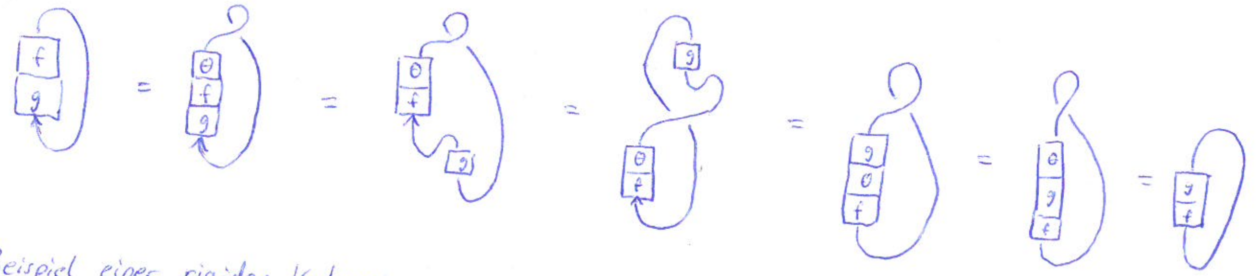
Eigenschaften von tr:

$tr(f \otimes g) = tr(f) \otimes tr(g)$

$tr(f^*) = tr(f)$

$tr(fg) = tr(gf)$

~~Typisches Beispiel einer rigiden Kategorie~~



□

Typisches Beispiel einer rigiden Kategorie

Sei G eine endliche Gruppe. Betrachte Rep_G: Kategorie der endlich dim. Darstellungen von G.

$V, W \in ob(Rep_G) \Rightarrow V \otimes W$ ist wieder eine Darstellung

V^* ist ebenso eine Darstellung

triviale Darstellung ist Einselement

Kategorie immer noch symmetrisch

allgemeiner: KG ist Hopf-Algebra, $(KG)^*$ ist ebenso eine Hopf-Algebra

⇝ Konstruktion von Drinfeld :) Quantendoppel $KG \otimes (KG)^*$ ist Hopf-Algebra, deren Darstellungskategorie ein echtes Braiding besitzt.

:) Quantendoppel ist sogar Band Kategorie

~~**Def.:** Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Ab-Kategorie, falls Hom(V, W) eine abelsche Gruppe ist und für alle $V, W \in ob(\mathcal{C})$ und $\circ$ bilinear. Wir werden außerdem immer annehmen, dass das Tensorprodukt eine bilineare Operation ist.~~

~~Dann ist Hom(V, W) ein Modul über dem Ring $End(\mathbb{1})$ und die Verknüpfung ist $End(\mathbb{1})$-bilinear.~~

~~Sei $\mathcal{C}$ eine~~

Def.: Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt additiv über einem Körper K falls gilt:

(i) $\mathrm{Hom}(V,W)$ sind K-V.r. und Verknüpfung ist bilinear

(ii) $\exists\, 0 \in ob(\mathcal{C})$ so, dass $\mathrm{Hom}(0,V) = \mathrm{Hom}(V,0) = 0$

(iii) endliche Summen existieren in $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ heißt abelsch, falls

(iv) jedes $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ besitzt einen Kern und coKern, jeder Morphismus ist Verknüpfung eines Epimorphismus gefolgt von einem Monomorphismus

Falls $\mathrm{Kern} f = 0$, dann ist $f = \mathrm{Kern}(\mathrm{coKern} f)$.

Falls $\mathrm{coKern} f = 0$, dann $f = \mathrm{coKern}(\mathrm{Kern} f)$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mathrm{Kern} f"] \arrow[dr, "0"'] & V \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd} \quad \text{und falls} \quad \begin{tikzcd} K' \arrow[d, dashed, "u"'] \arrow[rr] \arrow[ddr, bend right, "0"'] & & V \arrow[dd, "f"] \\ K \arrow[urr] \arrow[drr, "0"] & & \\ & & W \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & W \arrow[d, "\mathrm{coKern} f"] \\ & C \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "0"] \arrow[ddrr, bend right, "0"'] & & W \arrow[dl] \arrow[dd, "\mathrm{coKern} f"] \\ & C' \arrow[dr, dashed] & \\ & & C \end{tikzcd}$$

Ein Objekt V in einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$ mit $\mathrm{End}(\mathbb{1}) \cong K$ heißt <u>einfach</u>, falls $\mathrm{End}(V) \cong K$.
Eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ heißt <u>halbeinfach</u>, falls jedes Objekt eine Summe einfacher Objekte ist.