

Sei  $\mathcal{C}$  eine halbeinfache abelsche Bandkategorie.

Tensorprodukt auf Objekten:

- $V_i$  einfache Objekte mit  $V_0 = 1$ ,  $i \in I$ .

$$V_i \otimes V_j \cong \underbrace{\bigoplus_{k \in I} N_{ij}^k V_k}_{\text{Fusionsregeln}} = \bigoplus_{k \in I} \underbrace{V_k \oplus \dots \oplus V_k}_{N_{ij}^k \text{-mal}}, \quad N_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+$$

Da endliche Produkte und Koproducte in abelschen Kategorien übereinstimmen, gilt

Falls  $V_i \otimes V_j \cong \bigoplus_{k \in I} N_{ij}^k V_k$  und nur endlich viele  $N_{ij}^k \neq 0$ , dann ist

$$\dim \text{Hom}(V_k, V_i \otimes V_j) = \dim \text{Hom}(V_k, \bigoplus_{k' \in I} N_{ij}^{k'} V_{k'}) = \sum_{k'} \underbrace{\dim \text{Hom}(V_k, V_{k'})}_{\delta_{k,k'}} \cdot N_{ij}^{k'} = N_{ij}^k.$$

Falls  $V_i$  (absolut einfach) ist, dann ist auch  $V^*$  (absolut einfach)  $\text{Hom}(V_i, V) \cong \text{Hom}(V^*, V^*)$ , es gilt auch:  
 $\# V_i^* \cong V_{i^*}$  für ein  $i^* \in I$  (Isomorphismus nicht kanonisch)  $V \text{ einfach} \Rightarrow V^* \text{ einfach}$

Eigenschaften der Fusionskoeffizienten:  $N_{ij}^k = N_{ji}^k = N_{ik^*}^{j^*}$ ,  $N_{ij}^0 = \delta_{ij^*}$   
↑ braiding ↑ duals ↑  $\text{Hom}(1, V_i \otimes V_j) \cong \text{Hom}(V_j^*, V_i)$

Weiter setzen wir:  $\theta_i \text{id}_{V_i} = \theta_{V_i} \in \text{Hom}(V_i, V_i) \cong k$

$d_i = \dim V_i$

Bemerkung:

$$d_i d_j = \text{tr}(\text{id}_{V_i}) \cdot \text{tr}(\text{id}_{V_j}) = \text{tr}(\text{id}_{V_i \otimes V_j}) = \text{tr}(\text{id}_{\bigoplus_{k \in I} N_{ij}^k V_k}) = \sum_{k \in I} N_{ij}^k \text{tr}(\text{id}_{V_k}) = \sum_{k \in I} N_{ij}^k d_k.$$

$\theta_0 = 1$ ,  $\theta_{i^*} = \theta_i$ ,  $d_0 = 1$ ,  $d_{i^*} = d_i$ .

Lemma:  $d_i \neq 0$

Beweis:  $V_i \otimes V_i^* \cong 1 \oplus R$  mit  $\text{Hom}(1, R) = 0$

$$\Rightarrow i_{V_i}: 1 \rightarrow V_i \otimes V_i^* \text{ und } e_{V_i^*}: V_i^* \otimes V_i^* \rightarrow 1$$

faktorisieren über 1 und sind  $\neq 0$  wegen Snake relations.

Graphisches Kalkül

- Keine Bilder für Summen, aber Konvention für den Fall endlich vieler einfacher Objekte:

Wenn ein Strang in einem Diagramm kein Label trägt, verstehen wir hier die

& Summe über alle möglichen einfachen Objekte gewichtet mit ihren Dimensionen  $d_i$

Wegen  $d_i = d_{i^*}$  spielt die Orientierung des Stranges keine Rolle in diesem Fall.

Lemma:

Falls  $I$  endlich

nur andere Schreibweise

mit  $p^\pm = \sum_{i \in I} \theta_i^{\pm 1} d_i^2$

Beweis: Vom letzten Mal:

Sei  $f: V_i \rightarrow V_i$  die linke Seite. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \theta_i \operatorname{tr}(f) &= \left( \text{diagram} \right)_i = \sum_j d_j \operatorname{tr}(\theta_{V_j \otimes V_i}) = \sum_{j,k} d_j N_{ji}^k d_k \theta_k \\ \operatorname{tr}(\theta_{V_j \otimes V_i}) &= \operatorname{tr}(\theta_{\bigoplus_k N_{ji}^k V_k}) \\ &= \sum_k N_{ji}^k \theta_k \cdot d_k \\ &= \sum_k \left( \sum_j N_{ji}^k d_j \right) d_k \theta_k = \sum_k d_k d_k d_i \theta_k = p^+ d_i \\ \Rightarrow f &= p^+ \left( \text{diagram} \right) \quad \square \end{aligned}$$

Da beide Seiten verträglich mit Summen sind, gilt auch

(entsprechend für  $p^-$  und  $\theta^{-1}$ )

auch ohne Label!

Zur Erinnerung: Kirby - Fenn - Rouke Bewegungen:

Das heißt: Falls  $p^+ \neq 0$  ist, können wir vielleicht aus dem graphischen Kalkül eine Invariante von 3-Mfkt. basteln.

Satz: Sei  $\mathcal{C}$  eine halbeinfache <sup>abelsche</sup> Band-Kategorie mit nur endlich vielen Iso-Klassen einfacher Objekte. Betrachte folgende Matrizen:

$$\tilde{s}_{ij} = \text{diagram of two circles with arrows}, \quad t_{ij} = \delta_{ij} \theta_i, \quad c_{ij} = \delta_{ij} \theta_i^*$$

Lemma:

$$\text{diagram of a circle with a vertical line} = \frac{\tilde{s}_{ij}}{d_i} \text{diagram of a vertical line}$$

Beweis:  $\text{End}(V_i) \cong k$

$$k \longrightarrow \text{End}(V_i) \\ 1 \longmapsto \text{id}_{V_i}$$

Sei  $f: V_i \rightarrow V_i$  die linke Seite

$$f = \frac{\text{tr}(f)}{d_i} \text{id}_{V_i} \quad \text{d.h.} \quad \text{tr}(f) = \tilde{s}_{ij} \quad (\text{eigentlich } \tilde{s}_{ji}, \text{ aber } \tilde{s}_{ji} = \tilde{s}_{ij}) \quad \square$$

$$\left[ \tilde{s}_{ij} = \text{diagram} = \theta_i^{-1} \theta_j^{-1} \cdot \text{tr}(\theta_{V_i \otimes V_j}) = \theta_i^{-1} \theta_j^{-1} \sum_k N_{i,j}^k \theta_k d_k \right]$$

$$\tilde{s}_{ij} = \tilde{s}_{ji} = \tilde{s}_{i^* j^*} = \tilde{s}_{j^* i^*}$$

Satz: Mit  $\tilde{s}, t$  und  $c$  wie oben gilt:

$$(\tilde{s}t)^3 = p^+ \tilde{s}^2, \quad (\tilde{s}t^{-1})^3 = p^- \tilde{s}^2 c, \quad ct = tc, \quad c\tilde{s} = \tilde{s}c, \quad c^2 = 1$$

Beweis der ersten Relation:

Wegen

$$\text{diagram of two circles} = \text{diagram of two circles with arrows}$$

gilt:

$$\text{diagram} = p^+ \text{diagram} = p^+ \text{diagram} = (*)$$

$$* = p^+ \theta_i^{-1} \theta_k^{-1} \frac{\tilde{s}_{ik}}{d_i} \text{diagram}$$

Linke Seite von (\*):

$$\sum_j d_j \theta_j \text{diagram} = \sum_j d_j \theta_j \frac{\tilde{s}_{jk}}{d_j} \text{diagram} = \sum_j \theta_j \tilde{s}_{jk} \frac{\tilde{s}_{ij}}{d_i} \text{diagram}$$

$$\Rightarrow p^+ \theta_i^{-1} \tilde{s}_{ik} \theta_k^{-1} = \sum_j \tilde{s}_{jk} \theta_j \tilde{s}_{ij}$$

$$\Rightarrow p^+ t^{-1} \tilde{s} t^{-1} = \tilde{s} t \tilde{s} \Leftrightarrow p^+ \tilde{s}^2 = (\tilde{s}t)^3$$

Korollar: Falls  $\tilde{s}$  invertierbar ist, gilt:  $\tilde{s}^2 = p^+ p^- \cdot c$ , insbesondere  $p^+$  und  $p^- \neq 0$ .

Beweis: Es gilt dann:  $t \tilde{s} t \tilde{s} = p^+ s t^{-1}$

$$\Rightarrow \tilde{s} t^{-1} \tilde{s} t^{-1} t \tilde{s} t \tilde{s} = p^+ (s t^{-1})^3 = p^+ p^- \tilde{s}^2 c$$

$$\stackrel{''}{\tilde{s} t^{-1} \tilde{s}^2 t \tilde{s}}$$

$$\Rightarrow t \tilde{s}^2 t = p^+ p^- c \Rightarrow \tilde{s}^2 = p^+ p^- c$$

Korollar: Ist  $\tilde{s}$  invertierbar und gilt außerdem  $p^+ = p^-$ , dann ist mit  $s = \frac{\tilde{s}}{\sqrt{p^+ p^-}}$   
 $(s t)^3 = s^2 = c$ ,  $c t = t c$ ,  $c^2 = 1$ .

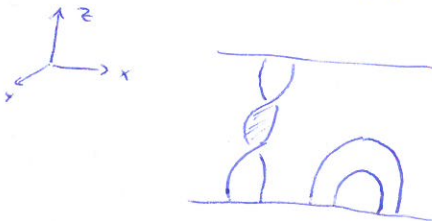
$s$  und  $t$  liefern eine Darstellung der modularen Gruppe  $SL_2(\mathbb{Z}) = \langle s, t \mid (s t)^3 = s^2, s^4 = 1 \rangle$ .

Def: Eine halbeinfache, abelsche Bandkategorie  $\mathcal{C}$  heißt modulare Tensorkategorie, falls:

- (i)  $\mathcal{C}$  hat nur endlich viele Iso-Klassen einfacher Objekte.
- (ii)  $\tilde{s}$  ist invertierbar.

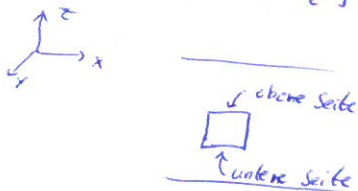
Def: Ribbon tangle mit  $n$  Strängen

• Isotopieklasse von  $n$  disjunkten Streifen in  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  so, dass Basis auf den Geraden  $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0, 1\}$  liegt mit Vorderseite in pos.  $y$ -Richtung.



Coupons

• Rechteck in  $\mathbb{R}^3$  in Ebene ~~parallel zu~~  $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$  mit Seiten parallel zu  $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$  und  $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ .

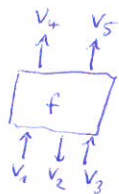


Verallgemeinerter Ribbon tangle mit  ~~$n$~~  Strängen

• Isotopieklasse von mehreren <sup>disjunkten</sup> Ribbon tangles und Coupons in  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  so dass die Basis der tangles entweder in  $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0, 1\}$  liegt (mit Vorderseite „nach vorn“ wie oben) oder an der oberen oder unteren Seite einer Coupons endet. (mit Vorderseite wie oben).

•  $\mathcal{C}$ -gefärbte Ribbon tangles

- (i) Jeder Strang ist gerichtet
- (ii) Jeder Strang gelabelt durch ein Objekt in  $\mathcal{C}$
- (iii) Jeder Coupon gelabelt durch einen Morphismus in  $\mathcal{C}$   
mit Regeln vom graphischen Kalkül



$$f: V_1 \otimes V_2^* \otimes V_3 \longrightarrow V_4 \otimes V_5$$

Graphischer Kalkül liefert natürliche Abb.:

$$F: \text{Mor}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}\text{-gefärbte Ribbon tangles}$$

Thm. (Reshetikhin - Turaev):  $F$  ist wohl def., d.h. isotope Ribbon tangles liefern gleiche Morphismen.

Thm. (Reshetikhin - Turaev): Für jeden Morphismus  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  in  $\mathcal{C}$   
Für jeden  $\mathcal{C}$ -gefärbten Ribbon tangle  $T$  läßt sich ein  
Morphismus  $F^{-1}(T): V_1 \rightarrow V_2$  in  $\mathcal{C}$  definieren.