Topologische Quantenfeldtheorien

12.01.2012

1

- $\mathcal{C}$ halbeinfache abelsche Bandkategorie mit endlich vielen Iso-Klassen einfacher Objekte (indiziert durch I).

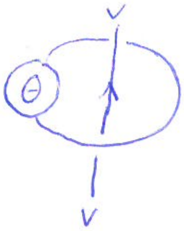
$\tilde{S}_{ij} =$  $= \theta_i^{-1}\theta_j^{-1}\, tr(\theta_{V_i^* \otimes V_j})$ heißt S-Matrix von $\mathcal{C}$.

Def.: $\mathcal{C}$ heißt modulare Tensorkategorie, falls
(i) Anzahl Iso-Klassen einfacher Objekte endlich
(ii) $\tilde{S}$ invertierbar

$p^+ = \sum_{i \in I} \theta_i d_i^2$; $p^- = \sum_{i\in I} \theta_i^{-1} d_i^2$

Lemma: $\mathcal{C}$ MTK $\Rightarrow$ $p^+ \neq 0$ und $p^- \neq 0$

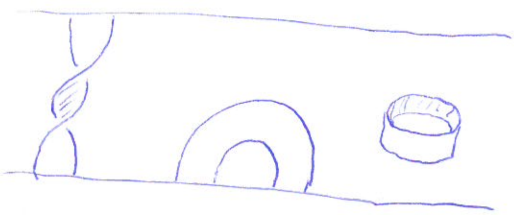
Lemma:

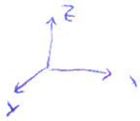
 $= p^+$ 

entsprechend mit $\cdot)$ θ^{-1} auf d. linken Seite
$\cdot)$ θ auf d. rechten Seite und p^- statt p^+.

Graphischer Kalkül als Funktor

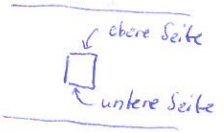
Def.: Ribbon tangle mit n Strängen
- n disjunkte Streifen in $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ so, dass Basis auf den Geraden $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0,1\}$ liegt
- Streifen haben Vorder- und Rückseite
- Vorderseite in pos. y-Richtung an beiden Basen

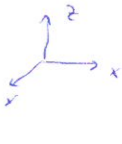




Coupon

- Rechteck in $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ in Ebene parallel zu $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ mit Seiten parallel zu $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$ und $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$
- Rechteck/Coupon hat obere Seite und untere Seite





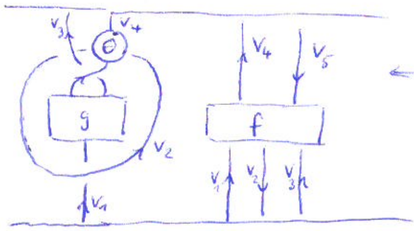
Verallgemeinerter Ribbon tangle

- Mehrere disjunkte Ribbon tangles und Coupons in $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ so, dass die Basis der tangles entweder in $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0,1\}$ liegt (Vorderseite in pos. y-Richtung wie oben) oder an der oberen oder unteren Seite eines Coupons endet (Vorderseite in pos. y-Richtung).

Sei $\mathcal{C}$ eine Bandkategorie

$\mathcal{C}$-gefärbte Ribben tangles

- ist verallgemeinerter Ribbon tangle mit folgenden Zusatzinformationen
  - (i) Jeder Strang ist gerichtet
  - (ii) Jeder Strang ist gelabelt durch ein Objekt in $\mathcal{C}$
  - (iii) Jeder Coupon ist gelabelt durch einen Morphismus in $\mathcal{C}$



← Beispiele

monoidale Kategorie $Rib_{\mathcal{C}}$:

Objekte: Folgen endlicher Länge der Form $((V_1,\varepsilon_1),(V_2,\varepsilon_2),\dots,(V_m,\varepsilon_m))$ mit $V_i \in ob(\mathcal{C})$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. (auch leere Folge!)

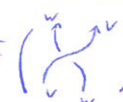
Morphismen: $((V_1,\varepsilon_1),\dots,(V_m,\varepsilon_m)) \longrightarrow ((W_1,\varepsilon_1'),\dots,(W_n,\varepsilon_n'))$
gegeben durch Isotopie Klasse von $\mathcal{C}$-gefärbten Ribbon tangles, so dass die Stränge am unteren Ende mit V_i gelabelt und aufwärts bei $\varepsilon_i = +1$ / abwärts bei $\varepsilon_i = -1$ gerichtet sind und entsprechend am oberen Ende.

Komposition: Übereinander schachteln

Tensorprodukt: Nebeneinander stellen

Theorem (Reshetikhin - Turaev): Sei $\mathcal{C}$ eine Bandkategorie. Dann existiert ein (bis auf nat. Äquivalenz) eindeutiger Funktor $F_{\mathcal{C}}: Rib_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$, der das Tensorprodukt erhält und folgende Eigenschaften besitzt

(1) $F((V,+1)) = V$, $F((V,-1)) = V^*$

(2) $F($  $) = c_{V,W}$, $F($  $) = \theta_V$

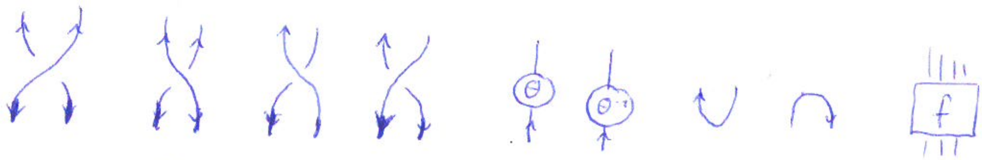
$F($  $) = e_V$, $F($  $) = i_V$, $F($  $) = f$

Dann erfüllt F auch alle anderen Eigenschaften des graphischen Kalküls.

Beweis des Satzes von R.-T.

Idee: Finde Generatoren und Relationen für Rib_e

Lemma: Die $\mathcal{C}$-gefärbten Ribbon tangles



erzeugen Rib_e.

varianten von 3-Mfkten :

Satz (Reshetikhin-Turaev) Sei $\mathcal{C}$ eine modulare Tensorkategorie mit $p_+^+ = p_-^-$ und L ein gerahmter Link in $\mathbb{R}^3 \subset S^3$. Dann definiert:

$$\tau(M_L) = D^{-|L|-1} F_e(L) \qquad \text{mit } D = \sqrt{p^+ p^-} = p^+$$

und $|L|$ = Anzahl Komponenten von L

eine Homöomorphie invariante von 3-Mfkt., d.h. falls

$$M_L \cong M_{L'} \Rightarrow \tau(M_L) = \tau(M_{L'}).$$

Beweis: $M_L \cong M_{L'} \Leftrightarrow L$ geht aus L' durch Kirbi-moves hervor.

$\tau(M_L)$ ist invariant unter Kirby-moves wegen des ~~in der letz~~ eingangs erwähnten Lemmas. □

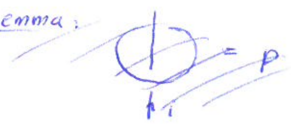
Beispiele: a) $L =$  in S^3 $\rightsquigarrow$  $\subset S^3$

zur Erinnerung:
Randkurve gibt an, wo der Meridian des Torus eingeklebt wird. Dies ist also die Chirurgie, die Meridian und Longitude vertauscht.

Resultat: $M_L = S^1 \times S^2$

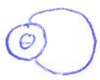
$$F_e(L) = \sum_i d_{V_i} \cdot \underbrace{F_e(\bigcirc_{V_i})}_{d_{V_i}}$$

$$= \sum_i d_{V_i}^2$$

Lemma: 

Lemma: $p^+ p^- = \sum_i d_{V_i}^2$

$$\Rightarrow \tau(M_L) = (p^+)^{-2} \cdot (p^+)^2 = 1$$

b) $L =$  in S^3

Resultat: $M_L = S^3$

$$F_e(L) = \sum_i d_{V_i} \cdot F_e(\ldots_i) = \sum_i d_{V_i}^2 \theta_i = p^+$$

$$\Rightarrow \tau(M_L) = \tau(S^3) = (p^+)^{-2} \cdot p^+ = (p^+)^{-1}$$

Satz (Turaev). Sei $\mathcal{C}$ eine modulare Tensorkategorie mit $p^+ = p^-$. Dann existiert eine erweiterte TQFT Z so, dass

$$Z(M) = \tau(M) \quad \text{für jede geschlossene 3-Mfkt. } M.$$

Warum „erweitert"?

- Bausteine unserer TQFT sollten nicht mehr nur 3-Mfkt. sein, sondern 3-Mfkt. mit gerahmten Links im Inneren.
- Da die Invariante zur Berechnung die Färbung der Links ~~und~~ verlangt, ist es keine großer Schritt, wenn wir gleich zu 3-Mfkten mit $\mathcal{C}$-gefärbten Ribbon tangles im Inneren übergehen.

Daher definieren wir Z als TQFT auf einer erweiterten Kobordismenkategorie.

Def.: $\mathcal{C}$-gefärbte Fläche Σ:

- orientierte kompakte (glatte) 2-Mfkt. Σ zusammen mit einer endlichen Anzahl markierter Punkt $p_1, \dots, p_m \in \Sigma$ und
  - nicht-verschwindende Tangentialvektoren $v_i \in T_{p_i}\Sigma$
  - Objekten $W_i \in ob(\mathcal{C})$
  - Vorzeichen $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$

$\overline{\Sigma}$ ist Σ mit umgekehrter Orientierung und $(\bar{\varepsilon}_i, \bar{v}_i) = (-\varepsilon_i, -v_i)$

$\mathcal{C}$-gefärbte 3-Mfkt. M:

- ist Paar (M, T) mit M orientierter 3-Mfkt mit Rand und T einem partiell $\mathcal{C}$-gefärbtem ribbon tangle in M so, dass die einzigen ungefärbten Komponenten Links sind und die gefärbten Komponenten auf dem Rand von M enden.

$\overline{(M,T)} = (\overline{M}, \overline{T})$

Orientierung umkehren; Richtungen der Stränge umkehren

Rand einer $\mathcal{C}$-gefärbten Mfkt. M soll $\mathcal{C}$-gefärbte Fläche sein

$\partial(M,T) = (\Sigma, p_i, v_i, \varepsilon_i, W_i)$ mit $\Sigma = \partial M$, p_i = Mittelpunkte der Basen des ribbon tangles T.

$\varepsilon_i = \begin{cases} +1, & \text{falls der Strang nach innen gerichtet ist} \\ -1, & \text{falls der Strang nach außen gerichtet ist} \end{cases}$

W_i = Färbung des Stranges

v_i = Tangentialvektor der Basis des i-ten Stranges mit Orientierung so, dass (n_i, v_i) pos. orientiert ist.

$\rightsquigarrow$ Kobordismen Kategorie $\mathcal{C}ob_{\mathcal{C}}(3)$ mit Inklusion $\mathcal{C}ob(3) \longrightarrow \mathcal{C}ob_{\mathcal{C}}(3)$.

netikhin - Turaev Konstruktion

Konstruieren Z zunächst für Standardflächen

Def.: Ein Typ t ist eine endliche Folge $((W_1,\varepsilon_1),(W_2,\varepsilon_2),H,\dots)$
bestehend aus
- Paaren (W_i,ε_i) mit $W_i \in ob(\mathcal{C})$ und $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$
- dem Symbol H, welches für Henkel steht.

$g(t)$ Geschlecht des Typs t ist Anzahl der Symbole H.

Jedem Typ ist ein Ribbon tangle T_t zugeordnet bestehend aus
- •) einem ungefärbten Coupon
- •) einem Strang mit Label W für jedes Auftauchen von $(W,\pm 1)$ in t ~~der~~ wobei ε die Richtung des Stranges festlegt
- •) einem (ungetwisteten) Bogen für jedes H

$t = ((W_1,+),H,(W_2,-),H) \rightsquigarrow$ 

Konstruiere zu T_t eine $\mathcal{C}$-markierte Fläche Σ_t in folgender Weise:
- Wähle Umgebung ~~von~~ des Coupons in $\mathbb{R}^3$ homöomorph zu D^3 (klein genug)
- Für jeden Bogen füge einen Henkel ein
- erhalte $\mathcal{C}$-gefärbte 3-Mfkt. M_t, setze $\Sigma_t = \partial M_t$.
- Σ_t eindeutig bis auf Homöomorphie.