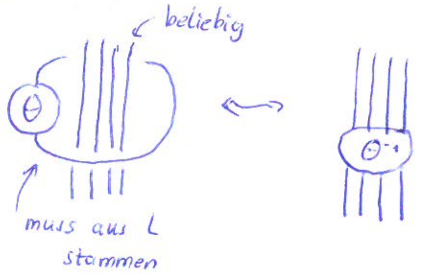
Topologische Quantenfeldtheorien

Erweiterte Invariante für $\mathcal{C}$-gefärbte geschlossene 3-Mfkt. (M,T)

- Betrachte Paar $L \sqcup T \subset S^3$ bestehend aus einem ungefärbten gerahmten Link L und einem partiell $\mathcal{C}$-gefärbten Ribbon-Link T in S^3.
- Wird die tubulare Umgebung für die Chirurgie klein genug gewählt, erhalten wir hieraus eine geschlossene $\mathcal{C}$-gefärbte 3-Mfkt (M_L, T).

Satz (R.-T.): Jede zusammenhängende geschlossene ~~3-Mfkt.~~ $\mathcal{C}$-gefärbte 3-Mfkt. (M,T) entsteht durch Chirurgie an einem Paar $(L \sqcup T \subset S^3)$ wie oben beschrieben.

Verallgemeinerte Kirby-Fenn-Rourke-Bewegungen:



Satz (R.-T.): $(M_L, T) \cong (M_{L'}, T') \iff L \sqcup T \subset S^3$ entsteht aus $L' \sqcup T' \subset S^3$ durch verallgemeinerte K.F.R-Bewegungen.

Satz (R.-T.): Sei $\mathcal{C}$ eine MTK mit $p^+ = p^-$. Sei (M,T) eine geschlossene zus. hängende $\mathcal{C}$-gefärbte 3-Mfkt, sei $L \sqcup T \subset S^3$ ein Paar, so dass $(M_L, T) \cong (M,T)$. Dann definiert

$$\tau(M,T) = \mathcal{D}^{-|L|-1} F_{\mathcal{C}}(L \sqcup T)$$

eine Homöomorphieinvariante von (M,T).

Reshetikhin-Turaev-Konstruktion

1. Schritt: Konstruktion der TQFT für kombinatorisch handhabbare 2- bzw. 3-Mfkt.

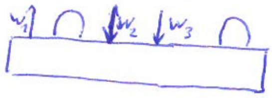
Def.: Ein Typ t ist eine endliche Folge $((W_1, \varepsilon_1), (W_2, \varepsilon_2), H, \ldots)$ bestehend aus

- Paaren (W_i, ε_i) mit $W_i \in ob(\mathcal{C})$ und $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$.
- dem Symbol H (für Henkel)

$g(t)$ = Anzahl der H's in der Folge t heißt Geschlecht von t.

Jedem Typ ist ein Ribbon tangle T_t in $\mathbb{R}^3$ zugeordnet bestehend aus

-) einem (ungefärbten) Coupon
-) einem Strang mit Label W für jedes Auftauchen von $(W, \pm 1)$ in t, wobei ε die Richtung des Stranges festlegt und der Strang an der Oberseite des Coupons beginnt.
-) einem (ungetwisteten) Bogen für jedes H.

Beispiel: $t = ((W_1, +), H, (W_2, -), (W_3, -), H) \rightsquigarrow$ 

Jedem Typ ist außerdem eine $\mathcal{C}$-gefärbte Fläche zugeordnet.
Sei $U_t \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre abgeschlossene Umgebung von T_t. Setze $\Sigma_t = \partial U_t$ mit den entsprechenden Punkten p_i, Vorzeichen ε_i, Färbungen W_i und Tangentialvektoren v_i.
Es gilt: $g(\Sigma_t) = g(t)$.

Involution auf Typen: $\bar{t}$ ist die umgekehrte Folge mit umgekehrten Vorzeichen.
Es gibt einen kanonischen Homöomorphismus: $r_t : \Sigma_t \xrightarrow{\cong} \Sigma_{\bar{t}}$ durch Reflektion

Def: Ein Paar (Σ, φ) bestehend aus einer $\mathcal{C}$-gefärbten Fläche Σ und einem Homöomorphismus $\varphi : \Sigma \xrightarrow{\cong} \Sigma_{t_1} \amalg \Sigma_{t_2} \amalg \dots \amalg \Sigma_{t_n}$ heißt <u>parametrisierte $\mathcal{C}$-gefärbte Fläche</u>. Ein <u>Homöomorphismus von parametrisierten $\mathcal{C}$-gefärbten Flächen</u> ist einer, der die Parametrisierung respektiert.

Vektorraum zu einer $\mathcal{C}$ parametrisierten Fläche:

$$W_t = W_1^{\varepsilon_1} \otimes W_2^{\varepsilon_2} \otimes H \otimes \dots \qquad \text{mit } W_i^{\varepsilon} = \begin{cases} W_i & \text{falls } \varepsilon = 1 \\ W_i^* & \text{falls } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

$$\text{und } H = \bigoplus_{i \in I} V_i \otimes V_i^*$$

Beobachtung: $H^* = \bigoplus_{i \in I} V_i^{**} \otimes V_i^* \xrightarrow[\cong]{\delta_{V_i}^{-1} \otimes \mathrm{id}} \bigoplus_{i \in I} V_i \otimes V_i^* = H$

$\underset{\parallel}{Z(\Sigma, \varphi)}$

Setze $\tau(\Sigma, \varphi) = \tau(\Sigma_t) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, W_t) =: \langle W_t \rangle$. Für $\Sigma_{t_1} \amalg \dots \amalg \Sigma_{t_n}$ setze $\tau(\Sigma_{t_1} \amalg \dots \amalg \Sigma_{t_n}) = \tau(\Sigma_{t_1}) \otimes \dots \otimes \tau(\Sigma_{t_n})$.

Interpretation:

$$H \otimes W_1 \otimes W_2 \otimes H \otimes W_3 \cong \bigoplus_{(i,j) \in I^2} \underbrace{V_i \otimes V_i^* \otimes W_1 \otimes W_2 \otimes V_j \otimes V_j^* \otimes W_3}_{*_{ij}}$$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, *_{ij})$ sind die Möglichkeiten, den Coupon in T_t zu färben, falls die Farben auf den Bögen durch i und j fixiert werden.

Bilinearform auf $\tau(\Sigma_t)$

Seien $\varphi: 1\!\!1 \longrightarrow W_t$ und $\psi: 1\!\!1 \longrightarrow W_{\bar t}$ Elemente von $\tau(\Sigma_t)$

Definiere $(\varphi, \psi) = D^{-g(t)} \cdot \left(1\!\!1 \xrightarrow{\varphi \otimes \psi} W_t \otimes W_{\bar t} \xrightarrow{e_t} 1\!\!1\right)$

wobei e_t gegeben ist durch sukzessives Hintereinanderschalten der Auswertungsabb. $e_i : W_i^{\varepsilon_i} \otimes W_i^{-\varepsilon_i} \longrightarrow 1\!\!1$ und der Abbildungen $e_H \circ (\eta \otimes id_H) : H \otimes H \longrightarrow 1\!\!1$, wobei $\eta : H \longrightarrow H$ gegeben ist durch $\eta|_{V_i \otimes V_i^*} = d_i^{-1} \cdot id$.

Analog zu e_t können wir i_t definieren, so dass die Dualitätsrelationen gelten. Sei ψ^t der adjungierte Morphismus bzgl. dieser Operation, dann ist $(\varphi, \psi) = \psi^t \circ \varphi$. Außerdem ist $W_{\bar t}$ isomorph zu $(W_t)^*$.
Dann gilt: $Hom(W_{\bar t}, 1\!\!1) \cong Hom((W_{\bar t})^*, 1\!\!1) \cong Hom(1\!\!1, W_{\bar t})$. Für jeden Summanden $1\!\!1$ in W_t können ~~wir also eine Projektion in $Hom(W_{\bar t}, 1\!\!1)$ finden~~ wir eine Projektion in $Hom(W_t, 1\!\!1)$ finden, die auf allen anderen Summanden verschwindet. Nach dem Iso. wird diese durch eine Abb. $\psi: 1\!\!1 \to W_{\bar t}$ realisiert. Somit ist (φ, ψ) nicht ausgeartet und wir erhalten einen Isomorphismus

$$\tau(\Sigma_{\bar t}) \cong \tau(\Sigma_t)^*.$$

Def.: Ein speziellen Link ist ein Ribbon tangle X (mit Coupons), partiell $\mathcal{C}$-gefärbt, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Jeder ungefärbte Strang ist entweder ein gerahmter Knoten oder beide Enden liegen nebeneinander auf demselben ungefärbten Coupon

(ii) Alle ungefärbten Coupons sind von der Form wie in der Def. von T_t beschrieben

Beispiele:

oder

Einem speziellen Link läßt sich eine Reshetikhin-Turaev-Invariante zuordnen:

- Die ungefärbten Coupons haben Typen $t_1, \ldots, t_k$ nach Def. des speziellen Links
- Jeder Vektor aus $\bigotimes_{i=1}^{k} \langle W_{t_i} \rangle$ liefert eine Färbung für diesen Coupon.

$$\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_k \longmapsto T(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_k)$$

Ribbon tangle ohne ungefärbte Coupons
kann immer noch ungefärbte Knoten enthalten

$$F_{\mathcal{C}}(X)(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_k) = \sum_c d_c F_{\mathcal{C}}(T(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_k, c)) \qquad \text{mit } d_c = \prod_i d_{c_i}$$

Def.: Eine parametrisierte $\mathcal{C}$-gefärbte 3-Mfkt. ist eine $\mathcal{C}$-gefärbte 3-Mfkt. (M,T) zusammen mit einer Parametrisierung der Rand Komponenten.

- Sei X ein spezieller Link in S^3. $L \subset X$ die Vereinigung über alle ungefärbten Knoten.
- Sei U_{t_i} der Henkelkörper des i-ten ungefärbten Coupons in X.

~~Eine Chirurgie an X in S^3~~ ist

M_X

Parametrisierungen entstehen durch die Einbettungen $U_{t_i} \hookrightarrow S^3$.

Chirurgie an X in S^3 liefert: $M_X = M_L \setminus \bigcup \mathring{U}_{t_i}$. Dies ist eine parametrisierte $\mathcal{C}$-gefärbte 3-Mfkt. mit Rand $\Sigma_{(\overline{t_i})}$ ← Vorsicht!

<u>Lemma</u> (R.-T.): Jede parametrisierte $\mathcal{C}$-gefärbte 3-Mfkt. entsteht durch Chirurgie an einem speziellen Link in S^3.

Setze jetzt für (M,T) mit $\partial M = \overline{\Sigma}_+ \sqcup \Sigma_-$.

$$Z(M,T) = Z(M_X) = \mathcal{D}^{\mu-1} \cdot F_{\mathcal{C}}(X) \in Z(\Sigma_+)^* \otimes Z(\Sigma_-) \cong \mathrm{Hom}(Z(\Sigma_+), Z(\Sigma_-)).$$

$$\cap \qquad \qquad \cong$$

$$Z(\overline{\Sigma}^+_{t_1} \sqcup \dots \sqcup \overline{\Sigma}^+_{t_k} \sqcup \Sigma^-_{t_1} \sqcup \dots \sqcup \Sigma^-_{t_l})^*$$

$$\cong Z(\Sigma^+_{t_1} \sqcup \dots \sqcup \Sigma^+_{t_k})^* \otimes Z(\Sigma^-_{t_1} \sqcup \dots \sqcup \Sigma^-_{t_l})$$

Haben zu prüfen:
- Verkleben (hier geht $p^+ = p^-$ ein)
- $Z(\Sigma_t \times I, \phi) = id_{\Sigma_t}$

... beim nächsten Mal

<u>Von parametrisierten Mfkt. zu nicht-parametrisierten</u>

- Jede $\mathcal{C}$-gefärbte Fläche besitzt eine Parametrisierung: $\varphi: \Sigma \longrightarrow \Sigma_{t_1} \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{t_k}$
- Jede andere Parametrisierung $\psi: \Sigma \longrightarrow \Sigma_{t_1} \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{t_k}$ entsteht durch $f \circ \varphi$ mit einem Homöo. $f: \Sigma_{t_1} \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{t_k} \longrightarrow \Sigma_{t_1} \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{t_k}$.
- Betrachte Zylinder $\Sigma \times I$ mit Parametrisierung

$$\overline{\Sigma} \sqcup \Sigma \xrightarrow{\varphi \sqcup f\circ\varphi} (\overline{\Sigma}_{t_1} \sqcup \dots \sqcup \overline{\Sigma}_{t_k}) \sqcup (\Sigma_{t_1} \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{t_k})$$

~~liefert: $Z(\varphi \sqcup f\circ\varphi)$~~:

Liefert $f_* = Z(\Sigma \times I): Z(\Sigma, \varphi) \longrightarrow Z(\Sigma, f\circ\varphi)$

Eigenschaften:

$id_* = id$

$(f\circ g)_* = f_* \circ g_*$

Liefert <u>kanonische</u> Isos: $f_{\varphi,\psi}: Z(\Sigma,\psi) \longrightarrow Z(\Sigma,\varphi)$ mit $f_{\varphi_1,\varphi_2} \circ f_{\varphi_2,\varphi_3} = f_{\varphi_1,\varphi_3}$

Interpretation von $Z(M,T)$

Sei X der folgende spezielle Link

$t_u = ((V_1,+1),\, H,\, (V_2,-1)) \rightsquigarrow \langle W_{t_u} \rangle = \mathrm{Hom}\left(\mathbb{1},\, V_1 \otimes \left(\bigoplus_{i\in I} V_i \otimes V_i^*\right) \otimes V_2^*\right)$

$t_o = ((V_2,+1),\, H,\, (V_1,-1))$ $\quad \langle W_{t_o} \rangle = \mathrm{Hom}\left(\mathbb{1},\, V_2 \otimes \left(\bigoplus_{i\in I} V_i \otimes V_i^*\right) \otimes V_1^*\right)$

$\Rightarrow \langle W_{\bar{t}_o} \rangle = \mathrm{Hom}\left(\mathbb{1},\, V_1 \otimes \left(\bigoplus_{i\in I} V_i \otimes V_i^*\right) \otimes V_2^*\right)$

Abbildung von $\langle W_{t_u} \rangle$ nach $\langle W_{\bar{t}_o} \rangle$ gegeben durch Verknüpfung.

⑤

, identifiziere alle $Z(\Sigma, \varphi)$ mit der entsprechenden Äquivalenzrelation, um $Z(\Sigma)$ zu definieren.

•) Für parametrisierte 3-Mfkt. (M, T) wähle Parametrisierung des Randes, um $Z(M, T)$ zu definieren.