Topologische Quantenfeldtheorien (1)

15

Kurze Wiederholung: Kobordismen zwischen $\mathcal{C}$-gefärbten parametrisierten Flächen werden selbst parametrisiert durch spezielle Links in S^3.

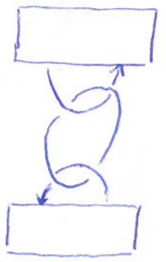
- Insbesondere konnten spezielle Links ungefärbte Coupons enthalten.
- Diese ungefärbten Coupons kodieren gerade den Homöomorphietyp der Randkomponenten und deren Färbungen.

Chirurgie an speziellem Link $X \subset S^3$: $L \subset X$ Vereinigung über alle ungefärbten Knoten in X

U_{t_i} Henkelkörper des i-ten ungefärbten Coupons

$$M_X = M_L \setminus \bigcup_i \mathring{U}_{t_i}$$

Beispiel: $X =$



Ist Kobordismus ~~von $S^3 \setminus (\mathbb{T}^2 \sqcup \mathbb{T}^2)$~~

von $\mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$, $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$

mit $L = \bigcirc$. Chirurgie an L liefert $S^1 \times S^2 \cong I/_{\partial I} \times S^2$

Entfernen der beiden U_{t_i} liefert

Ränder werden identifiziert

$$\cong I/_{\partial I} \times I \times S^1 \cong S^1 \times I \times S^1 = I \times \mathbb{T}^2$$

Kodiert also den Zylinder über $\mathbb{T}^2$.

Kurzer Einschub: Warum überhaupt $\mathcal{C}$-gefärbte 2- und 3-Mfkten.?
Warum Knoten in 3-Mfkt?

Motivation am Anfang: Witten: Invariante von 3-Mfkt. über das Pfadintegral

aber auch: Invariante ~~durch~~ Holonomie entlang von Schleifen in der Mannigfaltigkeit $\rightsquigarrow$ führt auf Jones-Polynom des Knotens.

Reshetikhin-Turaev-Konstruktion: TQFT von Mannigfaltigkeiten inklusive Knoten!
Es gibt eine modulare Tensorkategorie, die das Jones-Polynom liefert.

Sei (M,T) eine $\mathcal{C}$-gefärbte 3-Mfkt. mit $\partial M = \Sigma_+ \sqcup \Sigma_-$.

Setze $Z(M,T) = Z(M_X) = D^{|L|-1} \cdot F_{\mathcal{C}}(X) \in Z(\Sigma_+)^* \otimes Z(\Sigma_-) \cong \mathrm{Hom}(Z(\Sigma_+), Z(\Sigma_-))$

(ung. Knoten in X)

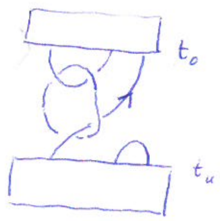
mit $F_{\mathcal{C}}(X)(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_k) = \sum_c d_c F_{\mathcal{C}}(X(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_k, c))$

und $d_c = \prod_i d_{c_i}$

Interpretation von $Z(M,T)$:

- Ränder sind von der Form $\Sigma^+_{t_1} \amalg \ldots \amalg \Sigma^+_{t_k} \amalg \overline{\Sigma}^-_{s_1} \amalg \ldots \amalg \overline{\Sigma}^-_{s_\ell}$
- Erzeuge geschlossene 3-Mfkt. durch Einkleben der Standard-3-Mfkt. $U^+_{\bar t_1}, \ldots U^+_{\bar t_k}, U^-_{s_1}, \ldots U^-_{s_\ell}$ inklusive leerer Coupons
- Färbe Coupons mit Elementen aus
  $$Z(\overline{\Sigma}^+ \amalg \Sigma^-) = \langle W_{\bar t_1} \rangle \otimes \ldots \otimes \langle W_{\bar t_k} \rangle \otimes \langle W_{s_1} \rangle \otimes \ldots \otimes \langle W_{s_\ell} \rangle$$
- Bestimme Invariante.

Beispiele: Nur ein „eingehender" und ein „ausgehender" Coupon



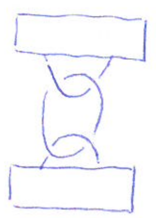
Lösche Coupons, übrig bleibt ein Diagramm $\tilde X$, das einen Morphismus $W_{t_u} \longrightarrow W_{t_o}$ beschreibt

Abbildung von

$$\langle W_{t_u} \rangle \longrightarrow \langle W_{t_o} \rangle$$ gegeben durch Komposition mit

$\langle W_{t_u} \rangle = \mathrm{Hom}(1\!\!1, W_{t_u})$, $\langle W_{t_o} \rangle = \mathrm{Hom}(1\!\!1, W_{t_o})$, $\mathcal{D}^{g(t_o)+g(t_u)} \mathcal{D}^{|L|-1} F_e(\tilde X)$?

Konkret für

$X =$ 

Lemma:  $= \delta_{ij} \frac{p^+p^-}{d_i}$ 

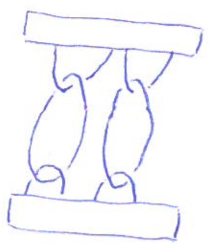
Beweis: Übungsaufgabe

Korollar:  $=$  $= \delta_{ij} \frac{p^+p^-}{d_i}$ 

Zusammen mit der richtigen Normierung erhalten wir:

$$Z(M_X) = id_{\mathbb{T}^2}$$

auch allgemeiner



ist Zylinder über Fläche vom Geschlecht 2.

Verkleben

- Sei: M_1 ein $\mathcal{C}$-gefärbter Kobordismus $\Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_1$
- Sei: M_2 ein $\mathcal{C}$-gefärbter Kobordismus $\Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$

Müssen prüfen: $Z(M_1 \amalg_{\Sigma_1} M_2) = Z(M_2) \circ Z(M_1)$ $\quad (*)$

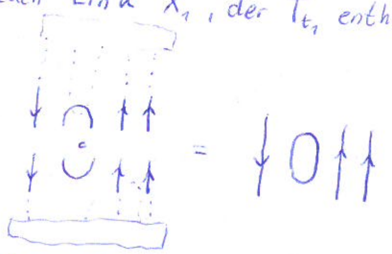
~~Sei~~ Der Übersichtlichkeit halber nehmen wir an, dass Σ_i nur aus einer Komponente besteht

$$\Sigma_i \cong \Sigma_{t_i}$$

zu t_1 gehört ein Tangle T_{t_1}:

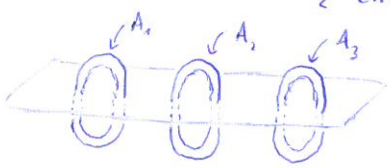
M_1 läßt sich darstellen durch einen speziellen Link X_1, der T_{t_1} enthält, entsprechend ist M_2 dargestellt durch X_2 mit $T_{\bar{t}_1}$.

rechte Seite von $(*)$ führt auf



Haben zu prüfen, dass Chirurgie entlang der neu entstandenen trivialen Knoten $\bigcirc$ der Verklebung von M_1 mit M_2 entlang von Σ_1 entspricht.

Betrachte:



$\bigcup_{i=1}^{g} A_g \cup (\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}) \subset S^3$

Sei: U reguläre Umgebung hiervon. U enthält den Link $\bigcup_{i=1}^{g} A_g$.

Führe Chirurgie in U an $\bigcup_{i=1}^{g} A_g$ durch.

Mit demselben Argument wie oben liefert dies ein 3-Mfkt, die homöomorph ist zu $\Sigma_1 \times I$.

~~Aber S^3 zerfa~~ •) Aber $S^3 \setminus U$ zerfällt in zwei Kopien von $\mathbb{R}^3$, die einen Ribbon tangle enthalten, so dass Chirurgie an diesem Tangle M_1, bzw. M_2 liefert.

•) ~~Einfügen von U~~ Durchführen dieser Chirurgien und Einfügen von U liefert Verklebung von M_1 und M_2 entlang des Zylinders $\Sigma_1 \times I$, also $M_1 \amalg_{\Sigma_1} M_2$

Von parametrisierten Mfkt. zu nicht parametrisierten

Lemma: Jede ℓ-gefärbte Fläche Σ besitzt eine Parametrisierung.

Sei $\psi : \Sigma \longrightarrow \Sigma_{t_1} \amalg \dots \amalg \Sigma_{t_k}$ eine Parametrisierung. Jede andere Parametrisierung $\varphi : \Sigma \longrightarrow \Sigma_{t_1} \amalg \dots \amalg \Sigma_{t_k}$ entsteht durch $\varphi = f \circ \psi$ für einen Homöo.

$$f : \Sigma_{t_1} \amalg \dots \amalg \Sigma_{t_k} \longrightarrow \Sigma_{t_1} \amalg \dots \amalg \Sigma_{t_k}$$

Betrachte Zylinder ~~mit~~ $\Sigma \times I$ mit Parametrisierung

$$\overline{\Sigma} \amalg \Sigma \xrightarrow{\psi \amalg f \circ \psi} (\overline{\Sigma}_{t_1} \amalg \dots \amalg \overline{\Sigma}_{t_k}) \amalg (\Sigma_{t_1} \amalg \dots \amalg \Sigma_{t_k})$$

liefert Operation $f_* = Z(\Sigma \times I) : Z(\Sigma, \psi) \longrightarrow Z(\Sigma, f \circ \psi)$

mit den Eigenschaften:

$$id_* = id$$

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

liefert kanonische Isomorphismen: $f_{\varphi, \psi} : Z(\Sigma, \psi) \longrightarrow Z(\Sigma, \varphi)$

mit $f_{\varphi_1, \varphi_2} \circ f_{\varphi_2, \varphi_3} = f_{\varphi_1, \varphi_3}$.

Definiere $Z(\Sigma) = \coprod_{\psi} Z(\Sigma, \psi) / \sim$ wobei Äquivalenzrelation durch $f_{\varphi, \psi}$ gegeben ist.

Aufgrund der Natürlichkeit von Z kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
Z(\Sigma_0, \psi) \arrow[r, "Z(M)"] \arrow[d, "f_{\psi', \psi}"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Z(\Sigma_1, \varphi) \arrow[d, "f_{\varphi', \varphi}"] \\
Z(\Sigma_0, \psi') \arrow[r, "Z(M')"'] & Z(\Sigma_1, \varphi')
\end{tikzcd}$$

M' ist dieselbe ℓ-gefärbte Mfkt. wie M jedoch mit einer anderen Parametrisierung der Randkomponenten.